Continuum Mechanics (I)

General Tensors.	۳۷	Piola stress tensors and
Cartesian Tensors.		alternative forms of equation
Integral theorms.	جلسه ۷	of motion.
Introduction and general		General theory of Constitutive equation
definitions.	جلسه ۸	Reiner - Rivlin fluid
Body & Configurations.		Elastic solid
Material and referential		Strain energy & hyperelastic materials
description of motion.		Material symmetry in nonlinear &
Material derivative.		linear elastic material
جلسه ۲ Kinematics of Continuum	۶۷	Monoclinic symmetry
Deformation gradient tensor	۷۲	Orthotropic & Isotropic matrial.
Polar decomposition theorm.	۷۴ جلسه ۹	Elastodynamic & elastostatic problems
Deformation measures & Strain tensor	۷۸	Wave propagation in elastic solids
Stretch of a line element	۸۳	Principle of Conservation of energy
جلسه ۳ Velocity gradient tensor		Clausius - Duhem inequality
Rate of deformation & Vorticity tensor	...	Thermodynamic processes
Superposed rigid body motion		Constitutive equations for thermoelasticity
جلسه ۵ Infinitesimal deformation & Liner theory		Linear viscous fluid.
Conservation of mass		Dissipation in Viscous fluids
Reynolds' transport theorm		Linear thermoelasticity
Traction vector		Gough - Joule effect
Principle of Conservation of		Thermomechanics from entropy balance
جلسه ۶ Linear & Angular momenta		Dissipative materials & 2'law Thermodynamics
Properties of traction vector &		Restriction on heat flux vector
Existence of Stress tensor		Comparsion with traditional thermodynamic
Local form of equation of motion		Cylindrical & Spherical Coordinates.

General Tensors. آنالیز تانسوری، تانسورهای عمومی.

Cartesian Tensors. آنالیز تانسوری و تانسورهای کارتزین.

نا وابسته بودن کمیتهای فیزیکی نسبت به دستگاه مختصات: باعث تعریف تانسورها می‌شود
به عنوان مثال نیروی F اعمال شده به یک جسم، جهت و مقدار آن مستقل
از دیدگاه است ولی مؤلفه‌های آن که وابسته به دستگاه مختصات انتخاب شده هستند
نا وابسته نیستند.

نیرو $\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1', F_2') = (F_1'', F_2'') = \cdots$

یا $\theta = \theta(x_1, x_2, x_3) = \theta'(x_1', x_2', x_3') \quad s.t: \theta \longrightarrow \theta'$

$\underline{x}' = x'(\underline{x})$

$a_i \,;\; i = 1,2,3 \,;\; \{a_1, a_2, a_3\}$ قراردادهای اینشتین

$$a_i = b_i \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ \vdots \\ a_{33} = b_{33} \end{cases}$$

a_{ij} در دستگاه مختصات کارتزین در فضای سه بعدی (V_3) دارای ۹ مؤلفه است. البته
تعداد مؤلفه‌های تانسور a_{ij} مستقل از
دستگاه مختصات است. به عنوان مثال
دیگر تانسور a_{ijk} دارای ۲۴ مؤلفه مستقل است.

مثال: $a_{ijk} = b_{kji} \Rightarrow a_{123} = b_{321}$

$$(\underline{A})_{ij} = [A]_{ij} = a_{ij} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ماتریسها در واقع نمایشهای مناسبی هستند برای تانسورهای مرتبه دوم؛ تانسورهای مرتبه بالاتر را نمی‌توان بصورت ماتریس نمایش داد. به بیان دیگر (البته نه به دلیل صرفاً استدلال اصلی) تانسور یک ماهیت است.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \qquad \cancel{\mathscr{L}}: a_{ij} = b_{ji} \longleftrightarrow \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}^T \\ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T \longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \\ \underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^T \longleftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{A} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T) + \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T)$$

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \tfrac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = b_{ij} + c_{ij}$$

(جزء متقارن) $b_{ij} = \tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \Rightarrow b_{ij} = b_{ji}$

(جزء پادمتقارن) $c_{ij} = \tfrac{1}{2}(c_{ij} - c_{ji}) \Rightarrow c_{ij} = c_{ji}$

در مورد تانسورهای بالاتر از مرتبه دوم، متقارن یا پاد متقارن بودن را نسبت به ۲ اندیس خاص داریم. به عنوان مثال تانسور مرتبه سوم a_{ijk} نسبت به دو اندیس اولش متقارن است:

$$a_{ijk} = a_{jik}$$

یا تانسور مرتبه چهارم b_{ijkl} نسبت به دو اندیس آخرش پاد متقارن است اگر داریم:

$$b_{ijkl} = -b_{ijlk}$$

متقارن یا پادمتقارن بودن ممکن است نسبت به جابجایی ۲ اندیس یا دو اندیس دیگر باشد. به عنوان مثال

$$a_{ijkl} = a_{klij}$$

اندیس تکراری یا ظاهری (Repeated Index; Dummy Index)

$$a_{ii} \triangleq a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$$

$$a_i b_i \triangleq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

اندیس تکراری فقط ۲ بار می‌تواند در یک رابطه تانسوری ظاهر شود. به عنوان مثال رابطه‌ای بصورت $a_i b_i c_i$ غلط است ولی رابطه‌ای بصورت زیر می‌توانیم داشته باشیم

$$a_{ii} b_j b_j = (a_{11} + a_{22} + a_{33})(b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3)$$

در یک معادله یا رابطه تانسوری تعداد اندیسهای تکراری، تأثیری در تعداد معادلات ندارد. به عنوان مثال رابطه $a_{ij} x_j = b_i$ به منظور ۳ معادله مستقل است بصورت زیر

$i=1 \qquad a_{1j} x_j = b_1 \qquad a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$

$i=2 \qquad a_{2j} x_j = b_2 \qquad a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$

$i=3 \qquad a_{3j} x_j = b_3 \qquad a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$

که می‌توان بصورت ماتریسی زیر نیز نوشت

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

به عنوان مثال اگر رابطه

$$a_{ijj} + b_i + c_i d_{kk} = 0$$

را در نظر بگیرید، این رابطه در واقع مبین ۳ معادله مستقل است که ازای مقادیر 3, 2, 1 که به اندیس i اختصاص می یابد، به دست می آید

$$i=1 \quad (a_{111} + a_{122} + a_{133}) + b_1 + c_1(d_{11}+d_{22}+d_{33}) = 0$$

$$i=2 \quad (a_{211} + a_{222} + a_{233}) + b_2 + c_2(d_{11}+d_{22}+d_{33}) = 0$$

$$i=3 \quad (a_{311} + a_{322} + a_{333}) + b_3 + c_3(d_{11}+d_{22}+d_{33}) = 0$$

با تعریف اندیس تکراری و مطالب اخیر، حال می توان حاصلضرب دو ماتریس را به صورت اندیسی نمایش دهیم. به عنوان مثال ۲ ماتریس $\underset{\sim}{A}$ و $\underset{\sim}{B}$ را در نظر بگیرید

$$\underset{\sim}{C} \triangleq \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B} \longrightarrow C_{ij} = a_{im} b_{mj}$$

یا به عنوان مثال دیگر

$$\text{Ex:} \quad \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{C}$$

$$\therefore d_{ij} = (A)_{im}(B)_{mn}(C)_{nj} = a_{im} b_{mn} c_{nj}$$

$$d_{ij} = a_{im} b_{mn} c_{nj}$$

$$d_{11} = a_{1m} b_{mn} c_{n1} = \underbrace{a_{11} b_{1n} c_{n1}}_{\text{۳ رابطه}} + \underbrace{a_{12} b_{2n} c_{n1}}_{\text{۳ رابطه}} + \underbrace{a_{13} b_{3n} c_{n1}}_{\text{۳ رابطه}}$$

به عنوان مثال حاصلضرب $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$ را به دست آورید.

$$(A_{ij}) = a_{ij} \quad , \quad (A_{ij})^T = a_{ji}$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{A}^T = (A_{ij})(A_{ij})^T \Rightarrow C_{ij} = a_{im} a_{jm}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = (A_{ij})^T(A_{ij}) \Rightarrow C_{ij} = a_{mi} a_{mj}$$

دلتای کرونیکر " Kronicker delta "

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \\ \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \end{array}$$

مؤلفه های دلتای کرونیکر همان ماتریس همانی است

$$(\underset{\sim}{I}_{ij}) = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اعمال یا حاصلضرب دلتای کرونیکر در یک تانسور صرفاً باعث تغییر اندیسهای تکراری به اندیس غیرتکراری دلتای کرونیکر می گردد. یعنی

$$a_i = b_i = \delta_{ij} a_j$$

$$i=1 \quad b_1 = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$i=2 \quad b_2 = \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 = a_2$$

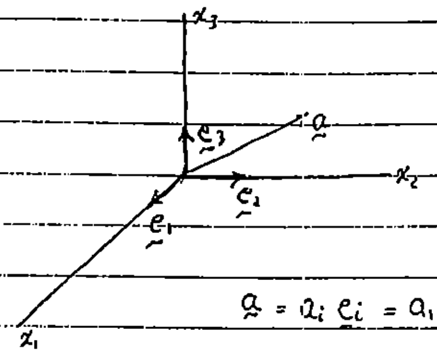
$$i=3 \quad b_3 = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = a_3$$

به عنوان مثالهای دیگر می توان به موارد زیر اشاره کرد

$$\delta_{ij} b_{ik} = b_{jk} \quad ; \quad \delta_{im}\delta_{mn}\delta_{nj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ii} = tr(\underset{\sim}{I}) = 3 \quad ; \quad T_{ijmn} = \delta_{ij} A_{mn}$$

بردارهای پایه (Basic vectors)



$\underset{\sim}{e}_i \triangleq$ Basic vector $\quad i=1,2,3$

$\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \delta_{ij} = \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_i$

$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i = a_1 \underset{\sim}{e}_1 + a_2 \underset{\sim}{e}_2 + a_3 \underset{\sim}{e}_3 = a_j \underset{\sim}{e}_j$

حال می‌توان حاصلضرب داخلی دو بردار $\underset{\sim}{a}$ و $\underset{\sim}{b}$ را بصورت زیر نوشت:

$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i \quad , \quad \underset{\sim}{b} = b_i \underset{\sim}{e}_i$

$\underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{b} = (a_i \underset{\sim}{e}_i) \cdot (b_j \underset{\sim}{e}_j) = a_i b_j (\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j)$

$= a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_j b_j$

$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

علامت جایگشت (Permutation Symbols)

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ijk ترتیب زوجی از 123 باشد} \\ -1 & \text{اگر ijk ترتیب فردی از 123 باشد} \\ 0 & \text{اگر دو اندیس یا بیشتر تکراری باشد} \end{cases}$$

$e_{123} = e_{231} = e_{312} = +1$

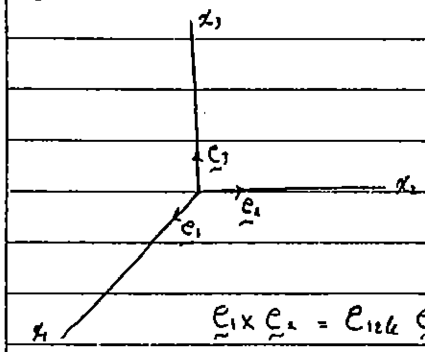
$e_{132} = e_{213} = e_{321} = -1$

$e_{112} = e_{122} = e_{133} = \cdots = 0$

ترتیب دوری 1 → 2 → 3 مقدار نمای ۳ بعدی صادق است، علامت جایگشت کاملاً یک تانسور پاد متقارن است

$e_{ijk} = -e_{ikj} = -e_{kji} = -e_{jik}$

با ترتیب علامت جایگشت بصورت فوق می‌توان حاصلضرب خارجی دو بردار را تعریف کرد



$\underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j = e_{ijk} \underset{\sim}{e}_k$

در خصوص اثبات رابطه فوق آنرا برروی اندیس تکراری k بسط می‌دهیم:

$\underset{\sim}{e}_1 \times \underset{\sim}{e}_2 = e_{12k} \underset{\sim}{e}_k = \overset{0}{e_{121}} \underset{\sim}{e}_1 + \overset{0}{e_{122}} \underset{\sim}{e}_2 + e_{123} \underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{e}_3$

$\underset{\sim}{e}_2 \times \underset{\sim}{e}_3 = e_{23k} \underset{\sim}{e}_k = e_{231} \underset{\sim}{e}_1 + \underset{0}{e_{232}} \underset{\sim}{e}_2 + \underset{0}{e_{233}} \underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{e}_1$

حال دو بردار $\underset{\sim}{A}$ ، $\underset{\sim}{B}$ را در نظر بگیرید

$\underset{\sim}{A} = a_i \underset{\sim}{e}_i \quad , \quad \underset{\sim}{B} = b_i \underset{\sim}{e}_i$

$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = a_i \underset{\sim}{e}_i \cdot b_j \underset{\sim}{e}_j = a_i b_j (\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

$\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = (a_i \underset{\sim}{e}_i) \times (b_j \underset{\sim}{e}_j) = a_i b_j (\underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j)$

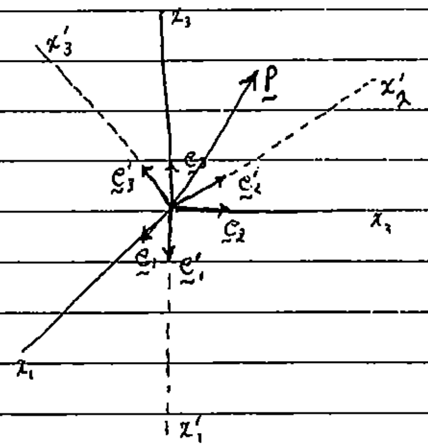
$= a_i b_j \; e_{ijk} \underset{\sim}{e}_k$

$= (e_{ijk} a_i b_j) \underset{\sim}{e}_k$

همچنین حاصلضرب مختلط ۳ بردار

$[\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}] = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C} = A_k \cdot e_{ijk} B_i C_j = e_{ijk} a_i b_j c_k$

تبدیل دستگاه مختصات



$$\underline{P} = x_i \underline{e}_i = x'_i \underline{e}'_i$$

بردار $\underline{P}$ ماهیت تانسوری دارد. به بیان دیگر مستقل از دید ناظر یا دستگاه مختصات است

$$x_i \underline{e}_i = x'_i \underline{e}'_i$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را در $\underline{e}_j$ ضرب کنیم در آن صورت داریم:

$$(x_i \underline{e}_i = x'_i \underline{e}'_i)\, \underline{e}_j$$

$$x_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = x'_i \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j \Rightarrow x_i \delta_{ij} = b_{ij} x'_i = x_j$$

$$\therefore\ x_i = b_{ji} x'_j \qquad b_{ij} \triangleq \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$$

یا اگر در $\underline{e}'_j$ ضرب شود داریم:

$$(x_i \underline{e}_i = x'_i \underline{e}'_i)\, \underline{e}'_j$$

$$x_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_j = x'_i (\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_j) = x'_i \delta_{ij} = x'_j$$

$$\therefore\ x'_i = a_{ij} x_j \qquad a_{ij} \triangleq \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j = b_{ij}$$

حال اگر a_{ij} به صورت $a_{ij} \triangleq \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_j$ تعریف شود در آن صورت داریم:

$$x_i = a_{ij} x'_j \quad , \quad x'_i = a_{ji} x_j$$

$$a_{ij} = \cos(x_i , x'_j)$$

مثال: اگر $\underline{A}$ یک تانسور متقارن و $\underline{B}$ پادمتقارن باشد، ثابت کنید $a_{ij} b_{ij} = 0$

$$\underline{C} \triangleq \underline{A} \cdot \underline{B} \Rightarrow C_{ij} = A_{im} B_{mj} = A_{mi} B_{mj} = -A_{mi} B_{jm}$$

$$S \triangleq A_{ij} B_{ij} = A_{mn} B_{mn} = A_{ji} B_{ji} = -A_{ij} B_{ij} = -S$$

$$\therefore\ S = -S \Rightarrow S = 0$$

در حالت کلی اگر تانسوری نسبت به ۲ اندیس متقارن و تانسور دیگر نسبت به ۲ اندیس پادمتقارن باشد در آن صورت حاصلضرب داخلی این دو تانسور با عمل انقباض بر روی اندیسهای مربوط، صفر می‌شود. به عنوان مثال:

$$Ex:\ A_{ijk} = A_{jik} \quad \& \quad B_{ijkm} = -B_{kjim}$$

$$\therefore\ A_{ijk} B_{imjn} = 0$$

$$\underset{\sim}{C} = \underline{A}\, \underline{B}^T \Rightarrow C_{ij} = a_{ik} (b_{kj})^T = a_{ik} b_{jk}$$

$$tr\, \underset{\sim}{C} = C_{ii} = a_{ik} b_{ik} = a_{ij} b_{ij}$$

$tr(\underline{A}\,\underline{B}^T) = 0$ در صورتی که $\underline{A} = \underline{A}^T$ ، $\underline{B} = -\underline{B}^T$ باشد در آن صورت

$$tr\, C = a_{ij} b_{ij} = 0$$

SIMARA

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \underline{a}\,\underline{x}'$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}' = \underline{a}^{-1}\underline{x} \quad , \quad \underline{x}' = \underline{a}^{T}\underline{x}$$

$$\therefore \quad \underline{a}^{-1} = \underline{a}^{T} \quad \text{or} \quad \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{T}$$

لذا ماتریس $\underline{A}$ متعامد است.

$$x_i = a_{ij}\,x'_j = a_{ij}\,a_{kj}\,x_k = \delta_{ik}\,x_k$$

$$(a_{ij}\,a_{kj} - \delta_{ik})\,x_k = 0$$

با توجه به رابطهٔ فوق و همچنین دلخواه بودن x_k نتیجه می‌گیریم

$$a_{ij}\,a_{kj} = \delta_{ik}$$

$$a_{ij}\,a_{kj} = \delta_{ik} = \delta_{ki} \Rightarrow \underline{A}\,\underline{A}^{T} = \underline{A}^{T}\underline{A} = \underline{I} \quad \text{or} \quad \underline{A}^{T} = \underline{A}^{-1}$$

لذا ماتریس $\underline{A}$ یا ماتریس دوران یک ماتریس متعامد است.

قضیه: اگر $A_k x_k = 0$ به ازاء هر x_k دلخواه برقرار باشد در اینصورت $A_k = 0$

$$A_k x_k = 0 \qquad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

چون x_k دلخواه است لذا اگر $x_2 = x_3 = 0$ ، $x_1 \neq 0$ در نظر گرفته شود در اینصورت نتیجه می‌گیریم $A_1 = 0$ است به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت $A_2 = A_3 = 0$
و نهایتاً $A_i = 0$

Mojtaba@cc.iut.ac.ir

E-mail دکتر ازهری:

Mojtaba_Azhari@yahoo.com

$$\underline{A}\,\underline{A}^{T} = \underline{I} \Rightarrow (\det \underline{A})\cdot(\det \underline{A}^{T}) = \det \underline{I}$$

$$\therefore (\det \underline{A})^2 = 1 \Rightarrow \det \underline{A} = \pm 1$$

حال اگر ماتریس $\underline{A}$ ماتریس دوران نسبت به یک دستگاه حقیقی باشد در اینصورت یکی از انتخاب‌های ممکن می‌تواند تبدیل همانی باشد به بیان دیگر $\underline{A} = \underline{I}$ در اینصورت $\det \underline{A} = +1$ خواهد بود. لذا در حالت کلی اگر $\underline{A}$ ماتریس تبدیل حقیقی دکارتی راستگرد به دستگاه حقیقی دکارتی راستگرد باشد در اینصورت $\det \underline{A}$ مساوی با $+1$ خواهد بود یعنی ماتریس تبدیل یک ماتریس متعامد خاص است یا اصطلاحاً Proper Orthogonal گویند.

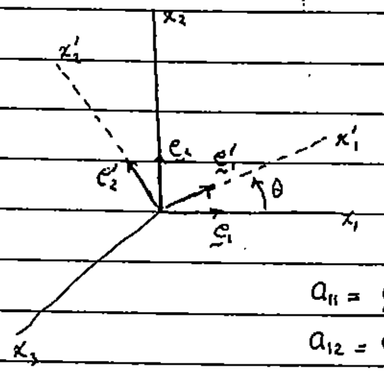
$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_p}\frac{\partial x'_p}{\partial x_j} = a_{ip}\,a_{jp} = (\underline{A})_{ip}(\underline{A})^{T}_{pj} = (\underline{I})_{ij}$$

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x'_j} = a_{mi}\,a_{mj} = (\underline{A})^{T}_{im}(\underline{A})_{mj} = (\underline{I})_{ij}$$

تعریف: مجموعهٔ ۳ کمیت (v_1, v_2, v_3) را مؤلفه‌های یک بردار یا یک تانسور دکارتی مرتبهٔ اول گوئیم اگر تحت تبدیل دستگاه مختصات بصورت زیر تبدیل شود

$$v_i = a_{ij}\,v'_j \quad , \quad v'_i = a_{ji}\,v_j$$

مثال: فرض کنید مؤلفه‌های بردار $\underset{\sim}{V}$ در دستگاه مختصات $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ بصورت $\underset{\sim}{V} = \langle 1, x_1+x_2, x_3\rangle$ باشد. در این صورت مؤلفه‌های بردار $\underset{\sim}{V}$ را در دستگاه $\underset{\sim}{x}'$ که از چرخش به اندازه θ حول محور x_3 حاصل شده است بدست آورید.



$$x_i = a_{ij} x'_j$$
$$a_{ij} = \cos(x_i, x'_j)$$
$$a_{ij} = \cos(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{e}'_j)$$

$$a_{11} = \underset{\sim}{e}_1 \cdot \underset{\sim}{e}'_1 = \cos\theta$$
$$a_{12} = \underset{\sim}{e}_1 \cdot \underset{\sim}{e}'_2 = -\sin\theta$$
$$a_{13} = \underset{\sim}{e}_1 \cdot \underset{\sim}{e}'_3 = 0$$
$$a_{21} = \underset{\sim}{e}_2 \cdot \underset{\sim}{e}'_1 = \sin\theta$$
$$a_{22} = \underset{\sim}{e}_2 \cdot \underset{\sim}{e}'_2 = \cos\theta$$
$$a_{23} = a_{32} = 0 \quad , a_{33} = 1$$

$$\therefore \underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x}' \text{ or } \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{V}'$$

$$\therefore \underset{\sim}{V}' = \begin{Bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{V} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1+x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$v'_1 = \cos\theta + [(\cos\theta\, x'_1 - \sin\theta\, x'_2) + (\sin\theta\, x'_1 + \cos\theta\, x'_2)]\sin\theta$$
$$v'_2 = -\sin\theta + [(\cos\theta\, x'_1 - \sin\theta\, x'_2) + (\sin\theta\, x'_1 + \cos\theta\, x'_2)]\cos\theta$$
$$v'_3 = x'_3$$

تعریف: کمیت $a = f(x_1, x_2, x_3)$ را اسکالر یا ناوردا (Invariant) گوییم یا تانسور مرتبه صفر گوییم اگر تحت تبدیل مختصات از $\underset{\sim}{x}$ به $\underset{\sim}{x}'$ تغییر نکند به بیان دیگر داریم:

$$\underset{\sim}{x} \longrightarrow \underset{\sim}{x}' = f(\underset{\sim}{x}) \Rightarrow a = f(x_1, x_2, x_3) = \hat{f}(x'_1, x'_2, x'_3)$$
$$\therefore a' = a$$

مثال: فرض کنید u_i، v_i مؤلفه‌های دو بردار باشند، در این صورت قانون تبدیل کمیتهای $u_i v_j$ را تحت تبدیل مختصات از $\underset{\sim}{x}$ به $\underset{\sim}{x}'$ (دکارتی و متعامد) بدست آورید.

$$T_{ij} = u_i v_j \quad , \quad T'_{ij} = u'_i v'_j$$
$$T'_{ij} = u'_i v'_j = (a_{ji} u_j)(a_{ij} v_i)$$
$$= a_{mi} u_m a_{nj} v_n = a_{mi} a_{nj} u_m v_n$$
$$= a_{mi} a_{nj} T_{mn}$$

$$\therefore \quad T_{ij} = a_{im} a_{jn} T'_{mn} \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{T}'\,\underset{\sim}{A}^T$$
$$T'_{ij} = a_{mi} a_{nj} T_{mn} \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{T}' = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{A}$$

تعریف: مجموعه ۹ کمیت T_{ij} را مؤلفه‌های یک تانسور دکارتی مرتبه دوم گوییم اگر تحت تبدیل مختصات بصورت زیر تبدیل شود

$$T'_{ij} = a_{mi} a_{nj} T_{mn}$$
$$T_{ij} = a_{im} a_{jn} T'_{mn}$$

تعریف: با بسط تعاریف اخیر می‌توان گفت، N^M (N به توان M) مؤلفه مستقل $T_{i_1 i_2 \dots i_M}$ را در فضای N بعدی V_N مؤلفه‌های یک تانسور دکارتی مرتبه M گوئیم اگر تحت تبدیل مختصات دکارتی x به x' به صورت زیر تبدیل شود

$$T_{i_1 i_2 \dots i_M} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_M j_M} T'_{j_1 j_2 \dots j_M}$$

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_M} = a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \cdots a_{j_M i_M} T_{j_1 j_2 \dots j_M}$$

نکته

۱. همانطور که ملاحظه می‌شود قانون تبدیل تانسوری یک قانون تبدیل خطی و همگن است. لذا اگر تانسور در دستگاه مختصات x، صفر باشد مثلاً $A_{ij}=0$ در این صورت A'_{ij} یا تانسور مربوط در جمیع دستگاههای مختصات صفر است $A_{ij}=0 \Leftrightarrow A'_{ij}=0$

۲. تانسورهای دکارتی هم مرتبه را می‌توان جمع و تفریق کرد، حاصل تانسوری دکارتی از همان نوع و مرتبه است.

$$U_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = (a_{im} a_{jn})(A'_{mn} + B'_{mn})$$
$$= a_{im} a_{jn} U'_{mn}$$

۳. تانسورهای دکارتی را می‌توان در هم ضرب کرد، حاصل تانسوری دکارتی است که مرتبه آن وابسته به تکراری بودن یا نبودن اندیسها دارد. به عنوان مثال:

T_{ij}: تانسور دکارتی مرتبه ۲

S_i: تانسور دکارتی مرتبه ۱

ضرب خارجی: $P_{ijk} = T_{ij} S_k$: تانسور دکارتی مرتبه ۳
(Outer Product)

تانسور مرتبه ۱ (یا تانسور یا بردار دکارتی) ضرب داخلی: $M_i = T_{ij} S_j$
(Inner Product)

$$M_i = (a_{im} a_{jn} T'_{mn})(a_{jp} S'_p)$$
$$= a_{im} a_{jn} a_{jp} T'_{mn} S'_p = a_{im} \delta_{np} T'_{mn} S'_p$$
$$= a_{im} T'_{mn} S'_n$$
$$= a_{im} M'_m$$

اگر a_i ، b_i بردار باشند در این صورت ضرب داخلی آنها اسکالر است زیرا:

$$P = a_i b_i = (a_{im} a'_m)(a_{in} b'_n)$$
$$= a_{im} a_{in} b'_n a'_m = \delta_{mn} b'_n a'_m$$
$$= a'_m b'_m$$
$$= P'$$

تعریف: عمل مساوی قرار دادن ۲ شاخص در یک تانسور را انقباض یا Contraction گویند. بنابراین هر عمل انقباض ۲ مرتبه از مرتبه تانسور می‌کاهد. مثلاً اگر T_{ijk} تانسور مرتبه ۳ باشد در این صورت $S_i = T_{ijj}$ مؤلفه‌های یک بردار است.

$$T_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{kp} T'_{mnp}$$
$$S_k = T_{iik} = a_{im} a_{in} a_{kp} T'_{mnp} = \delta_{mn} a_{kp} T'_{mnp}$$
$$= a_{kp} T'_{mmp} = a_{kp} S'_p$$

قضیه خارج قسمت (Quotient Theorem): اگر X_i یک بردار دلخواه و $A_i = T_{ij}X_j$ یک رابطه تانسوری و A_i یک بردار باشد، در اینصورت T_{ij} یک تانسور مرتبه ۲ است.

$$A_i = T_{ij}X_j = a_{im}A'_m = a_{im}T'_{mn}X'_n$$
$$= a_{im}T'_{mn}a_{jn}X_j$$

$$\therefore \ (T_{ij} - a_{im}a_{jn}T'_{mn})X_j = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{ij}X_j = 0$$

چون X_j یک بردار دلخواه است و A_{ij} مستقل از X_j است در اینصورت رابطه فوق یعنی $A_{ij}X_j = 0$ در واقع ۳ رابطه است بصورت زیر

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow A_{11} = A_{12} = A_{13} = 0 \\ \Rightarrow A_{21} = A_{22} = A_{23} = 0 \\ \Rightarrow A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0 \end{matrix}$$

در اینصورت $A_{ij} = 0$ یعنی

$$A_{ij} = T_{ij} - a_{im}a_{jn}T'_{mn} = 0$$

$$\therefore \ T_{ij} = a_{im}a_{jn}T'_{mn}$$

با تعمیم قضیه فوق به مراتب بالاتر قضایای خارج قسمت دیگری نیز وجود خواهد داشت. به عنوان مثال اگر X_{ij} یک تانسور دلخواه مرتبه ۲ و $S_{km} = T_{ijkm}X_{ij}$ یک رابطه تانسوری و S_{km} یک تانسور مرتبه دوم باشد، در اینصورت T_{ijkm} یک تانسور مرتبه ۴ می‌باشد.

مثال: فرض کنید X_i یک بردار دلخواه و $a \triangleq A_{ij}X_iX_j$ یک ناوردا باشد. در خصوص ویژگی تانسوری A_{ij} بحث کنید.

$$a = A_{ij}X_iX_j = a' = A'_{ij}X'_iX'_j$$
$$= a_{im}a_{jn}A'_{mn}\,a_{is}X'_s\,a_{jp}X'_p$$
$$= a_{im}\delta_{np}a_{is}\,A'_{mn}X'_sX'_p$$
$$= a_{im}a_{is}A'_{mn}X'_sX'_n$$

$$a = A_{ij}X_iX_j = a_{im}a_{jn}A'_{mn}X_iX_j$$

$$\therefore \ (A_{ij} - a_{im}a_{jn}A'_{mn})X_iX_j = 0 \qquad M_{ij}X_iX_j = 0$$

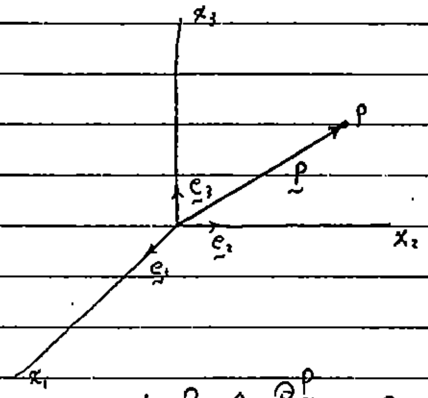
$$\therefore \ M_{11}X_1X_1 + (M_{12}+M_{21})X_1X_2 + (M_{13}+M_{31})X_1X_3$$
$$+ M_{22}X_2X_2 + (M_{23}+M_{32})X_2X_3 + M_{33}X_3X_3 = 0$$

با توجه به دلخواه بودن X_i نتیجه می‌گیریم:

$$\therefore \ M_{ij} + M_{ji} = 0$$

$$\therefore \ A_{ij} + A_{ji} = a_{im}a_{jn}(A'_{mn} + A'_{nm})$$

به بیان دیگر قسمت متقارن تانسور A دارای ویژگی تانسوری است و یا می‌توان گفت اگر A متقارن باشد در اینصورت A_{ij} یک تانسور مرتبه دوم است.



$\underline{P} = x_i \underline{e}_i$

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\underline{e}_i + \frac{\partial \underline{e}_i}{\partial x_j} x_i$$

$$= \delta_{ij}\underline{e}_i = \underline{e}_j$$

$$\therefore \ \underline{P}_{,i} \triangleq \frac{\partial \underline{P}}{\partial x_i} = \underline{e}_i$$

مثال: فرض کنید $\phi = \phi(\underline{x})$ یک اسکالر باشد در اینصورت ثابت کنید $\phi_{,i}$ که در واقع مؤلفه‌های گرادیان ϕ است، یک بردار است.

$$\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad ; \quad \phi = \phi'$$

$$\Rightarrow \phi_{,i} = \frac{\partial \phi'}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \qquad \text{def}: g_i \triangleq \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$1 \Rightarrow \phi_{,i} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} g'_j = a_{ij} g'_j$$

$$\therefore \ g_i = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} g'_j = a_{ij} g'_j$$

یعنی g_i یک بردار است، و $\underline{g}$ را گرادیان ϕ گوئیم

$$\underline{g} = g_i \underline{e}_i = \underline{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla \phi$$

$$\underline{\nabla} \triangleq \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

مثال: اگر X_{ij} تانسور متقارن دلخواه و $T_i \triangleq A_{ijk}X_{jk}$ یک رابطهٔ تانسوری و T_i بردار باشد در اینصورت نتیجه می‌گیریم:

$A_{ijk} + A_{ikj}$ یک تانسور مرتبه ۳ است.

مثال: ثابت کنید δ_{ij} تانسور مرتبه دوم است.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = Q_{in} Q_{jn} \delta'_{mn} = a_{im} a_{jm} = \delta_{ij}$$

اگر $\underset{\sim}{u}$ یک میدان برداری باشد در اینصورت دیورژانس $\underset{\sim}{u}$ عبارت است از

$$\nabla\cdot u = \left(e_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(u_j e_j) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(e_i\cdot e_j) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\delta_{ij}$$

$$= u_{j,i}\,\delta_{ij}$$

$$= u_{i,i}$$

بطور کلی اگر u یک میدان برداری باشد در اینصورت دیورژانس یک تانسور کاهش مرتبه دارد است.

مثال ۲ اگر ϕ یک میدان اسکالر باشد در اینصورت $\phi_{,ii}$ یک اسکالر است یعنی در هر دستگاه مختصاتی ثابت است (ناوردا است) آن را لاپلاسین (Laplacian) میدان اسکالر ϕ گوئیم و می‌توان نوشت

$$\phi_{,ii} = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3\partial x_3}$$

$$\nabla^2 \triangleq \nabla\cdot\nabla = \left(e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(e_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_3}$$

مثال ۳ اگر u یک میدان برداری باشد در اینصورت کرل u را بدست آورید.

$$c = \text{Curl}\, u \triangleq \nabla\times u = \left(e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\times(u_j e_j)$$

$$= \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, e_i\times e_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, e_{ijk}\, e_k$$

$$= u_{j,i}\, e_{ijk}\, e_k$$

$e_{klm}\, u_{j,i}$ یک تانسور مرتبه ۵ است که با ۲ بار

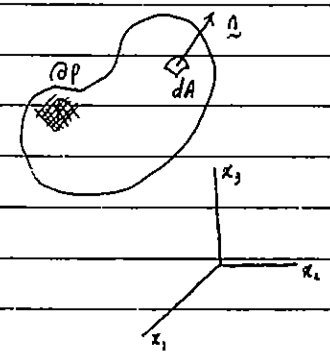
عمل انقباض ایجاد شده است و $\therefore\; C_k = u_{j,i}\, e_{ijk}$ یک Curl

بردار است.

قضایای انتگرال

تعریف: حوزه P را یک حوزه محدب گوئیم اگر هر دو نقطه روی مرز حوزه را به هم وصل کنیم، خط واصل کاملاً درداخل حوزه باشد

با تعریف کمیتهای زیر



P: حوزه

∂P: مرز حوزه

dv: المان حجم

da: المان سطح

$\underset{\sim}{n}$: بردار یکه عمود خارجی

حال اگر $T_{i_1 i_2\ldots i_N}$ یک تانسور دکارتی مرتبه N (یا یک میدان تانسوری) تعریف شده در داخل حوزه P و روی مرز ∂P باشد در اینصورت قضیه گوس یا قضیه دیورژانس (divergence Theorem) را می‌توان بصورت زیر نوشت. در حالت خاص اگر ϕ یک میدان اسکالر باشد

$$\int_P \phi_{,i}\, dv = \int_{\partial P} \phi\, n_i\, da$$

$$\int_P \nabla\phi\, dv = \int_{\partial P} \phi\, \underset{\sim}{n}\, da$$

در حالت کلی داریم:

$$\int_P \left(T_{i_1 i_2\ldots i_N}\right)_{,i}\, dv = \int_{\partial P}\left(T_{i_1 i_2\ldots i_N}\right) n_i\, da$$

حالتهای خاص قضیه فوق را می‌توان بصورت زیر دید که T کمیتهای تانسوری متفاوتی را شبیه نوشت

$$T_{i_1\ldots i_N} = \phi \quad ; \quad T_{i_1 i_2\ldots i_N} = f_i \quad ; \quad T_{i_1\ldots i_N} = f_j$$

① ج: $\int_P \phi_{,i}\, dv = \int_{\partial P} \phi\, n_i\, da \rightarrow \int_P \nabla\phi\, dv = \int_{\partial P} \phi\, \underline{n}\, da$

② ج: $\int_P f_{i,j}\, dv = \int_{\partial P} f_i\, n_j\, da$

③ ج: $\int_P f_{i,i}\, dv = \int_{\partial P} f_i n_i\, da \rightarrow \int_P \nabla\cdot\underline{f}\, dv = \int_P \underline{f}\cdot\underline{n}\, da$

$\therefore \int_P (\operatorname{div} \underline{f})\, dv = \int_{\partial P} \underline{f}\cdot\underline{n}\, da$

④ ج: $\int_P \varepsilon_{ijk}\, f_{j,i}\, dv = \int_{\partial P} \varepsilon_{ijk}\, f_j\, n_i\, da$

$\therefore \int_P \nabla\times\underline{f}\, dv = \int_{\partial P} \underline{n}\times\underline{f}\, da$

تانسورهای مرتبه دو را می‌توان به عنوان یک تبدیل خطی در نظر گرفت

$\underline{T}(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{T}\,\underline{a} + \underline{T}\,\underline{b}$ $\qquad \underset{\text{بردار}}{\underline{a}} \rightarrow \boxed{\underline{T}} \rightarrow \underset{\text{بردار}}{\underline{T}\,\underline{a}}$

$\underline{T}(\alpha\underline{a}) = \alpha\,\underline{T}\,\underline{a} \quad \forall \alpha \in R$

مثال ۱. فرض کنید $\underline{T}$ تبدیل خطی باشد که هر بردار را به بردار k ثابت نگاشت کند

آیا $\underline{T}$ تانسور است؟

$\underline{T}\,\underline{a} = \underline{K} \Rightarrow \forall \underline{a}$

$\underline{T}(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{K} \neq \underline{T}\,\underline{a} + T\underline{b}$

لذا $\underline{T}$ تانسور نیست، و فقط در حالتی که $K=0$ باشد رابطه فوق برقرار است

که در این صورت $\underline{T}$ را تانسور صفر گوییم.

مثال ۲. اگر $\underline{T}$ تبدیلی باشد که هر بردار را به خودش تبدیل کند در این صورت داریم:

$\underline{T}\,\underline{a} = \underline{a}\ ;\ \forall \underline{a}$

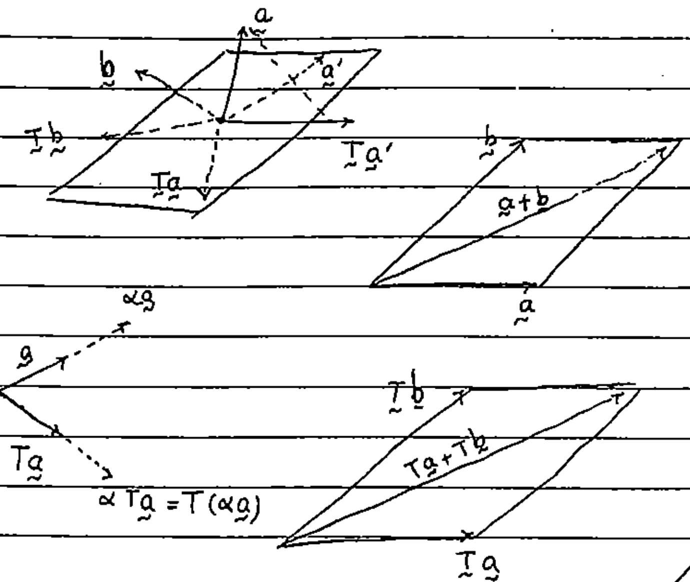
$\underline{T}(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{T}\,\underline{a} + \underline{T}\,\underline{b} = \underline{a}+\underline{b} = (\underline{a}+\underline{b})$

$\underline{T}(\alpha\underline{a}) = \alpha\,\underline{T}\,\underline{a}$

در نتیجه $\underline{T}$ یک تانسور است، آن را تانسور همانی گوییم.

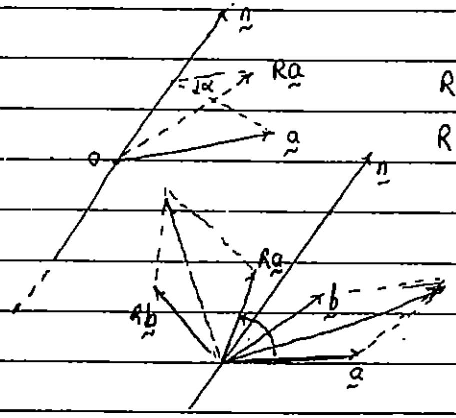
مثال ۳. اگر $\underline{T}$ تبدیلی باشد که هر بردار را به قرینه آینه‌ای آن نسبت به صفحه ای که

از مبدا عبور می‌کند نگاشت کند در این صورت داریم:



با توجه به اینکه $T(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) = T\underset{\sim}{a}+T\underset{\sim}{b}$ ، $T(\alpha \underset{\sim}{a}) = \alpha (T\underset{\sim}{a})$ ، $\underset{\sim}{T}$ تانسور است و آن را می‌توان تانسور متقارن نسبت به صفحه‌ی P نامید.

مثال ۴. اگر R تبدیلی باشد که هر بردار را به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول محور n دوران دهد در اینصورت داریم:



$$R(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}) = R\underset{\sim}{a} + R\underset{\sim}{b}$$

$$R(\alpha \underset{\sim}{a}) = \alpha (R\underset{\sim}{a})$$

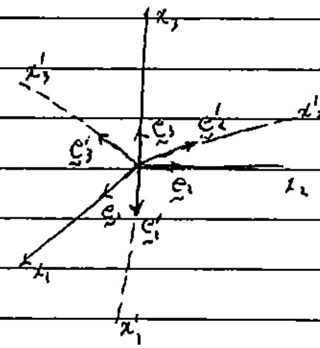
چون می‌توان یک متوازی الاضلاع را دوران داد. لذا R یک تانسور است و آن را تانسور دوران حول محور n به اندازه‌ی α گوییم.

مثال ۵. اگر T تانسور باشد در روابط زیر برای دو بردار مشخص $\underset{\sim}{a}$ ، $\underset{\sim}{b}$ داشته باشیم در اینصورت $T(\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b})$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} T\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b} \\ T\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b} \end{cases}$$

$$T(\underset{\sim}{a}+2\underset{\sim}{b}) = T\underset{\sim}{a} + 2T\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}+2\underset{\sim}{a}-2\underset{\sim}{b} = 3\underset{\sim}{a}-\underset{\sim}{b}$$

"مؤلفه‌های یک تانسور"



$$\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}'_j = a_{ij}$$

یک تانسور وقتی مشخص است که عملی را که روی هر بردار انجام می‌دهد مشخص باشد و چون هر بردار ترکیب خطی از $\underset{\sim}{e}_i$ است پس اگر عمل تانسور روی $\underset{\sim}{e}_i$ مشخص باشد در اینصورت تانسور مشخص است. چنانچه

$$\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_1 = T_{11}\underset{\sim}{e}_1 + T_{21}\underset{\sim}{e}_2 + T_{31}\underset{\sim}{e}_3$$

$$\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_2 = T_{12}\underset{\sim}{e}_1 + T_{22}\underset{\sim}{e}_2 + T_{32}\underset{\sim}{e}_3 \qquad \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_j = T_{ij}\underset{\sim}{e}_i$$

$$\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_3 = T_{13}\underset{\sim}{e}_1 + T_{23}\underset{\sim}{e}_2 + T_{33}\underset{\sim}{e}_3$$

در اینصورت T_{ij} را مؤلفه‌های تانسور T در دستگاه مختصات (x_1, x_2, x_3) گوییم. چون هر بردار ۳ مؤلفه دارد و $T\underset{\sim}{e}_i$ نیز بردار است پس نیاز به ۳ مؤلفه برای مشخص شدن آن است و پس برای مشخص کردن تانسور نیاز به ۹ مؤلفه داریم.

$$[\underset{\sim}{T}]_{e_1,e_2,e_3} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

حال فرض کنید بخواهیم $\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{v}$ را بدست آوریم

$$\underset{\sim}{\omega} = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{v} = T(v_j \underset{\sim}{e_j}) = v_j T\underset{\sim}{e_j} = v_j T_{ij} \underset{\sim}{e_i} = \omega_i \underset{\sim}{e_i}$$

$$\omega_i = T_{ij} v_j \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$T\underset{\sim}{e_j} = T_{ij}\underset{\sim}{e_i} \Rightarrow T_{ij} = \underset{\sim}{e_i}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e_j}$$

$$T'_{mn} = \underset{\sim}{e'_m}\cdot T\underset{\sim}{e'_n} \qquad v_i = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{e_i}\ ,\quad v'_m = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{e'_m}$$

$$\underset{\sim}{e_i} = a_{im}\,\underset{\sim}{e'_m}$$

$$\Rightarrow T_{ij} = (a_{im}\underset{\sim}{e'_m})\cdot\underset{\sim}{T}(a_{jn}\underset{\sim}{e'_n}) = a_{im}a_{jn}\,\underset{\sim}{e'_m}T\underset{\sim}{e'_n}$$
$$= a_{im}a_{jn}T'_{mn}$$

جمع و تفریق تانسورها

جمع: اگر $\underset{\sim}{T}$ ، $\underset{\sim}{S}$ تانسور باشند در اینصورت $\underset{\sim}{T}\pm\underset{\sim}{S}$ را طبق روابط

$$(\underset{\sim}{T}\pm\underset{\sim}{S})\,\underset{\sim}{a} \triangleq \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{a} \pm \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{a}$$

تعریف شده اند، تانسور هستند.

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{S} \Rightarrow U_{ij} = T_{ij}+S_{ij}$$

$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{S} \Rightarrow W_{ij} = T_{ij}-S_{ij}$$

$$T_{ij} = \underset{\sim}{e_i}\cdot T\underset{\sim}{e_j}$$

ضرب: اگر $\underset{\sim}{T}$ ، $\underset{\sim}{S}$ تانسور باشند در اینصورت TS که توسط رابطه زیر تعریف شده است تانسور است، زیرا

$$(TS)\,\underset{\sim}{v} \triangleq T(S\underset{\sim}{v})$$

$$(TS)(\underset{\sim}{v_1}+\underset{\sim}{v_2}) = T(S(\underset{\sim}{v_1}+\underset{\sim}{v_2}))$$
$$= T(S\underset{\sim}{v_1}+S\underset{\sim}{v_2}) = T(S\underset{\sim}{v_1}) + T(S\underset{\sim}{v_2})$$
$$= (TS)\underset{\sim}{v_1} + (TS)\underset{\sim}{v_2}$$

خطی است.

مثال: اگر $U = TS$ باشد در اینصورت U_{ij} را بدست آورید

$$U_{ij} = \underset{\sim}{e_i}\cdot U\underset{\sim}{e_j} = \underset{\sim}{e_i}\cdot(TS)\underset{\sim}{e_j} = \underset{\sim}{e_i}\cdot T(S\underset{\sim}{e_j})$$
$$= \underset{\sim}{e_i}\cdot T(S_{mj}\underset{\sim}{e_m}) = S_{mj}\,\underset{\sim}{e_i}\cdot T\underset{\sim}{e_m} = T_{im}S_{mj}$$
$$\Rightarrow U_{ij} = (TS)_{ij} = T_{im}S_{mj}$$

نکته: ضرب تانسورها از قانون جابجایی تبعیت نمی‌کند و در حالت کلی $TS \neq ST$

$V = TSU \Rightarrow V_{ij} = T_{im} S_{mk} U_{kj}$

$T^2 = TT$

$T^k = T^{k-1} T$

نمایش ماتریسی تانسورهای مرتبه ۲ (تبدیل خطی) با هم متشابهند

$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{T}'\, \underset{\sim}{A}^T$

$\underset{\sim}{T}' = \underset{\sim}{A}^T\, \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A}^T = A^{-1} \quad , \quad \det \underset{\sim}{T} = \det \underset{\sim}{T}'$

دترمینان یک تانسور مرتبه دوم یک ناوردا است.

مثال ۱. اگر R تانسور دوران حول محور e_3 به اندازه زاویه θ باشد. ماتریس نمایش R را بنویسید.

$R\underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{e}_3$

$R\underset{\sim}{e}_1 = \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2$

$R\underset{\sim}{e}_3 = -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال ۲. الف) تانسور دوران حول محور e_3 به اندازه $\pi/2$ را بدست آورید. (R)

ب) تانسور دوران حول محور e_1 را بدست آورید. (S)

ج) در ابتدا دوران حول محور e_3 به اندازه $\pi/2$ و سپس دوران حول محور e_1 به اندازه $\pi/2$. تانسور دوران کلی مربوطه را بدست آورید.

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S\underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{e}_1$

$S\underset{\sim}{e}_2 = \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2 + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_3$

$S\underset{\sim}{e}_3 = -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_3$

$$\underset{\sim}{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta = \pi/2} \underset{\sim}{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$RS \neq SR \quad \therefore \quad \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال ۳. اگر T تانسور متقارن و حقیقی باشد، می‌دانیم مقادیر ویژهٔ آن حقیقی و بردارهای ویژهٔ آن دو به دو بر هم عمودند. چنانچه $\underline{n}_1$، $\underline{n}_2$ و $\underline{n}_3$ بردارهای ویژهٔ نرمالیزه شده و λ_1، λ_2 و λ_3 مقادیر ویژهٔ نظیر آنها باشند. نمایش ماتریسی تانسور T را در دستگاه مختصات $\underline{n}_1$، $\underline{n}_2$ و $\underline{n}_3$ به دست آورید.

$T\underline{n}_1 = \lambda_1 \underline{n}_1 \qquad T_{ij} = \underline{e}_i \cdot T\underline{e}_j$

$T\underline{n}_2 = \lambda_2 \underline{n}_2$

$T\underline{n}_3 = \lambda_3 \underline{n}_3 \qquad T_{11} = \underline{n}_1 \cdot T\underline{n}_1 = \lambda_1$

$T_{12} = \underline{n}_1 \cdot T\underline{n}_2 = \lambda_2(\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2) = 0$

$\vdots$

$$[T]_{\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

دستگاه مختصات اصلی یعنی دستگاهی که نمایش ماتریسی تانسور T نسبت به آن قطری باشد.

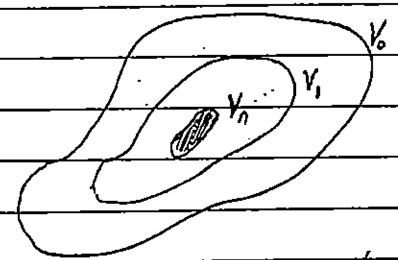
مثال ۴. ثابت کنید اگر λ_1 ماکزیمم مقدار ویژه و λ_3 مینیمم مقدار ویژه باشد (T) در هر دستگاه مختصات درایه‌های قطری T بین λ_1 و λ_3 خواهند بود.

سینماتیک یک محیط پیوسته

قبل از اینکه وارد بحث کلی در خصوص سینماتیک یک محیط پیوسته شویم، مفاهیم و کلیات مقدماتی در خصوص محیط پیوسته، بدنه، هیئت و مشتقات مادی را بیان می‌کنیم.

محیط پیوسته (Continuous Media)

تعریف: بدنهٔ V_0 را در نظر بگیرید، اگر V_1 را از داخل V_0 به عنوان یک بدنهٔ مجزا خارج کنیم در اینصورت $V_1 \subset V_0$ و به همین ترتیب الی آخر.



$V_n \subset V_{n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$

$V_n \triangleq Vol(V_n)$

$M_n \triangleq Mass(V_n)$

$\rho \triangleq \lim \frac{M_n}{V_n}$ را دانسیتهٔ یک محیط پیوسته

$n \to \infty$ or $V_n \to 0$

رابطهٔ فوق در خصوص تعریف دانسیتهٔ یک محیط پیوسته و وجود آن بصورت حد طبیعی بدان معناست که V_n را می‌توان به اندازهٔ کافی کوچک در نظر گرفت البته تا جایی که به اندازهٔ کافی شامل مولکولهای ماده باشد. لذا یک محیط پیوسته محیطی است که برای تمام نقاط آن چگالی تعریف شود.

یکی از ویژگیهای یک محیط پیوسته آن است که یک محیط پیوسته تابل سنجش است
به عنوان مثال اگر $S \subset V_0$ باشد در اینصورت $m(S)$ جرم S است

اگر: $S_1 \subset V_n$ & $S_2 \subset V_n$ & $S_1 \cap S_2 = \Phi$

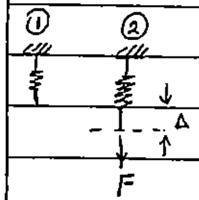
$$m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2)$$

اگر: $S_1 \subset V_n$ & $S_2 \subset V_n$ & $S_1 \cap S_2 = \hat{S}$

$$m(S_1 \cap S_2) = m(\hat{S})$$

$$m(S_1 \cup S_2) = m(S_1) + m(S_2) - m(\hat{S})$$

در مکانیک محیط پیوسته نگرش ما از دیدگاه هندسه اقلیدسی و مکانیک نیوتنی است و در واقع معادلات میدان را به عنوان شرایط لازم و ضروری حاکم بر رفتار محیط پیوسته در نظر می‌گیریم. این معادلات که در واقع همان شرایط لازم و ضروری حاکم بر رفتار اجسام هستند، کامل نیستند و در خصوص رفع عدم تعین در معادلات میدان نیاز به طراحی معادلات مشخصه داریم



به عنوان مثال تیر تحت اثر نیروی F را در نظر بگیرید
این تیر به عنوان یک محیط پیوسته بطور کامل مشخص
معادلات ۵ گانه میدان را ارضا می‌کند

تعادل جرم $1.\ m_1 = m_2$

تعادل اندازه حرکت خطی $2.\ F =$ نیروی موجود در تیر $= F \qquad \Sigma F = 0$

تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای $3.\ M = F$ لنگر ناشی از $= 0 \qquad \Sigma M = 0$

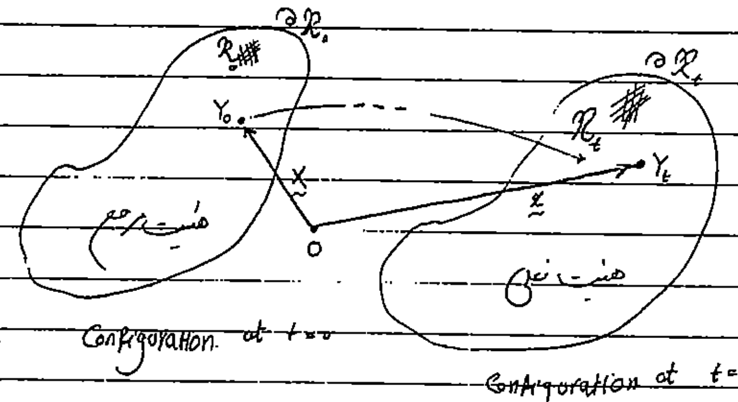
تعادل انرژی $4.$ انرژی ذخیره شده در تیر $= \int F\, dy$

قانون دوم ترمودینامیک $5.$ فرض کنیم هیچ تبادل حرارتی با بیرون ندارد. $T_1 = T_2$

ولی ارضای معادلات ۵ گانه میدان منجر به محاسبه تغییر مکان تیر نخواهد شد. به بیان دیگر، این معادلات نامعین هستند و در خصوص رفع عدم تعین در معادلات میدان نیاز به طراحی روابط نیرو - تغییر مکان برای فنر داریم. در حالت کلی و از دیدگاه Local (محلی) رفع عدم تعین در معادلات میدان منجر به طراحی معادلات مشخصه می‌شود. که نیاز به انجام آزمایش وارد و در واقع نقطه شروع تقریب در تحلیل مسائل محیط پیوسته در اینجاست.

بدنه (Body)

تعریف: قسمتی از یک محیط پیوسته که در فضا مطالعه ماست به عنوان مثال ناحیه $\mathcal{R}$ است که توسط مرز $\partial \mathcal{R}$ که در واقع یک رویه بسته است، تعریف می‌شود. این قسمت از محیط پیوسته را بدنه گوییم که از محیط اطراف توسط مرز $\partial \mathcal{R}$، تبادل نیرویی و حرارتی دارد.



یک محیط پیوسته از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است که اصطلاحاً نقطه مادی یا Material Point گوییم. به همین ترتیب می‌توان یک خط مادی یا Material Line را نیز تعریف کرد.

اگر حرکت جسم B در طول زمان مورد مطالعه قرار دهیم، بطور کلی موقعیت هر نقطه مادی در فضای ۳ بعدی (اقلیدسی) تابعی تعریف است

$$\underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t) \rightarrow \underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$$

که تابع χ به اندازه کافی پیوسته و مشتق پذیر است. چون از نظر فیزیکی هر نقطه مادی از جزء B، در هر لحظه (t) یک نقطه از فضا را به خود اختصاص می‌دهد که از این رو تابع تبدیل فوق، معکوس پذیر است.

بیان مادی و بیان لاگرانژی با مرجع حرکت

تعریف: حرکت یک محیط پیوسته که شامل جمیع نقاط مادی تشکیل دهنده آن است، برحسب موقعیت مرجع $\underset{\sim}{X}$ و یا موقعیت فعلی $\underset{\sim}{x}$ جسم، قابل بیان است.

$\underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t)$ بیان لاگرانژی حرکت

$\underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$ بیان مادی حرکت

فرض کنید بخواهیم در مورد سرعت و شتاب یک نقطه مادی صحبت کنیم در این صورت بیان لاگرانژی آنها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\underset{\sim}{v} = \dot{\underset{\sim}{x}} = \frac{\partial \chi(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t} = \hat{v}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\underset{\sim}{a} = \dot{\underset{\sim}{v}} = \ddot{\underset{\sim}{x}} = \frac{\partial^2 \chi(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t^2} = \hat{a}(\underset{\sim}{X}, t)$$

بطور کلی اگر f یک ویژگی محیط پیوسته باشد در این صورت $f = F(\underset{\sim}{X}, t)$ را بیان لاگرانژی ویژگی f گوییم و $f = \hat{F}(\underset{\sim}{x}, t)$ را بیان مادی یا اویلری ویژگی f گوییم.

$$f = (F(\underset{\sim}{X}, t)) \quad , \quad \underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\therefore \underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$\Rightarrow f = F(\underset{\sim}{X}, t) = F[\chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t), t] = \tilde{F}(\underset{\sim}{x}, t) = \hat{F}(\underset{\sim}{x}, t)$$

مشتق مادی (Material derivative)

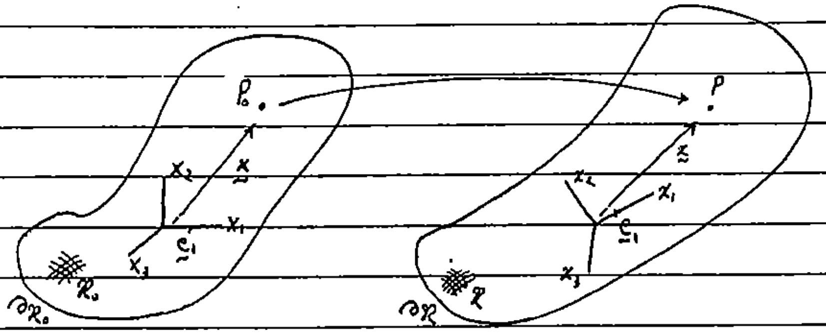
اگر f یک ویژگی محیط پیوسته باشد در این صورت $\dot{f}$ را مشتق مادی f گوییم و داریم:

$$\mathcal{L}: \quad f = F(\underset{\sim}{X}, t) \Rightarrow \dot{f} = \frac{\partial F(\underset{\sim}{X}, t)}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}: \quad f = \hat{F}(\underset{\sim}{x}, t) \Rightarrow \dot{f} = \frac{\partial \hat{F}(\underset{\sim}{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}(\underset{\sim}{x}, t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{f} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \hat{F}_{,i} v_i = \hat{F}_{,t} + \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \hat{F}$$

بدنه $\mathcal{R}$ را در دو وضعیت قبل و بعد از تغییر شکل در نظر بگیرید.



Reference Configuration. هیئت مرجع   Present Configuration. هیئت فعلی

بیان مختصات $\underset{\sim}{X}$ و $\underset{\sim}{x}$ می‌توانند در دستگاه‌های مختلفی باشند یعنی با هم تفاوت کنند

$$\underset{\sim}{X} = X_A\, \underset{\sim}{e}_A$$
$$\underset{\sim}{x} = x_i\, \underset{\sim}{e}_i$$

تغییر شکل از وضعیت $\mathcal{R}_0$ به $\mathcal{R}$ را می‌توان یک نگاشت تلقی کرد. به عبارت دیگر داریم $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t)$ که این نگاشت تابعی دوگانه پیوسته و مشتق‌پذیر بوده، یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$J = \det\left(\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \end{pmatrix} \neq 0$$

$\underset{\sim}{F}$: تانسور گرادیان تغییر شکل

$$J = \det \underset{\sim}{F} \quad , \quad \underset{\sim}{F} = \frac{\partial x}{\partial X}$$

$$F_{iA} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} = x_{i,A}$$

F: Deformation Gradient Tensor

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A}\, dX_A = F_{iA}\, dX_A \quad \text{or} \quad d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}$$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X}, t) \qquad J = \det \underset{\sim}{F} \neq 0$$

خاصیت صفر نبودن دترمینان گرادیان تغییر شکل به منظور یا به معنای آن است که نگاشت تغییر شکل نسبت local یا موضعی معکوس‌پذیر است. تانسور گرادیان تغییر شکل یک تانسور دو نقطه‌ای است. "Two Point Tensor"

مثال: تغییر فرم زیر را در نظر بگیرید. تانسور تغییر $\underset{\sim}{F}$ و ژاکوبین تبدیل را محاسبه کنید.

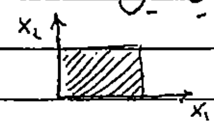
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + (X_1)^2 t \\ x_2 = X_2 - X_2 t - X_3 t \\ x_3 = X_3 + X_2 t - X_3 t \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1+2X_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{pmatrix} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$J = \det \underset{\sim}{F} = (1+2X_1 t)\left[(1-t)^2 + t^2\right] \neq 0 \qquad t \geq 0$$

صفر شدن ژاکوبین تبدیل به معنای صفر شدن یا صفر شدن حجم می‌باشد.

$$1 + 2X_1 t = 0 \qquad X_1 = -\frac{1}{2t}$$



اگر $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{X},t)=\underset{\sim}{I}$ شود در اینصورت تغییر شکل صرفاً یک جابجایی صلب بوده و چنانچه $\underset{\sim}{F}$ فقط تابع زمان باشد یعنی داشته باشیم $\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{F}(t)$ در اینصورت تغییر فرم را همگن گویند.

$\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{F}(t) \Rightarrow$ Homogeneous deformation.

قضیه تجزیه قطبی (Polar Decomposition)

هر تانسور غیر منفرد $\underset{\sim}{F}$ را می‌توان بصورت منحصر به فرد به حاصلضرب $\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{R}$ تجزیه کرد به قسمی که $\underset{\sim}{R}$ متعامد $\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^T=\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{I}$ ، $\underset{\sim}{U}$ و $\underset{\sim}{V}$ متقارن، مثبت معین هستند. $\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{U}^T$ ، $\underset{\sim}{V}=\underset{\sim}{V}^T$. البته این قضیه برای هر ماتریس غیر منفرد برقرار است.

اثبات: ماتریس $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F}$ متقارن و مثبت معین است.

$$\underset{\sim}{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x}=\langle x_1 \quad x_2 \quad x_3\rangle\cdot\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}^T\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{x}=(\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{x})^T\cdot(\underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{x})>0$$

چون $\det\underset{\sim}{F}\neq 0$ در نتیجه مثبت معین است. در نتیجه مقادیر ویژه آن همگی مثبت هستند. آنها را λ_1^2 ، λ_2^2 ، λ_3^2 می‌نامیم.

اگر ماتریس بردارهای ویژه نرمالیزه شده $\underset{\sim}{C}$ را P بنامیم در اینصورت داریم:

$$\underset{\sim}{\Lambda}\triangleq\underset{\sim}{P}^T\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&&0\\&\lambda_2^2&\\0&&\lambda_3^2\end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{C}^{1/2}=\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\underset{\sim}{P}^T$$

حال ماتریس $\underset{\sim}{U}$ را طبق رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\underset{\sim}{U}=\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\underset{\sim}{P}^T=\underset{\sim}{P}\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\lambda_2&\\0&&\lambda_3\end{pmatrix}\underset{\sim}{P}^T \quad \therefore \quad \underset{\sim}{U}\triangleq\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\,\underset{\sim}{P}^T$$

به تبعیت λ_i به ازای $i=1,2,3$ مثبت هستند، در اینصورت با تعریف فوق ماتریس $\underset{\sim}{U}$ یک ماتریس متقارن و مثبت معین است و در واقع جذر مثبت ماتریس $\underset{\sim}{C}$ می‌باشد.

$$\underset{\sim}{U}^{-1}=\underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{\Lambda}^{-1/2}\,\underset{\sim}{P}^T$$

$$\underset{\sim}{R}\triangleq\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{U}^{-1} \Rightarrow \underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U} \qquad \underset{\sim}{U}^{-1}=\begin{pmatrix}1/\lambda_1&&0\\&1/\lambda_2&\\0&&1/\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{U}\triangleq\underset{\sim}{C}^{1/2}=(\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F})^{1/2}$$

$$\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{R}=(\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{U}^{-1})^T(\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{U}^{-1})=\underset{\sim}{U}^{-T}\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{U}^{-1}=\underset{\sim}{U}^{-1}\underset{\sim}{U}^2\underset{\sim}{U}^{-1}$$

$$=(\underset{\sim}{U}^{-1}\underset{\sim}{U})(\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{U}^{-1})=\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^T$$

برای اثبات $\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R}$ کافی است $\underset{\sim}{V}\triangleq\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{R}^T$ در اینصورت $\underset{\sim}{V}$ متقارن بوده و چون با $\underset{\sim}{U}$ متشابه است مقادیر ویژه $\underset{\sim}{V}$ همان مقادیر ویژه $\underset{\sim}{U}$ یعنی λ_1 ، λ_2 ، λ_3 هستند لذا $\underset{\sim}{V}$ مثبت معین است.

$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{R}^T \Rightarrow \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R}$

$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U} \Rightarrow \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R} \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}^T$

$\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{x} = \lambda \underset{\sim}{x} \Rightarrow (\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U})\underset{\sim}{x} = \lambda(\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{x}) \quad , \underset{\sim}{y} \triangleq \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{x} \rightarrow \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{y}$

در نتیجه داریم:

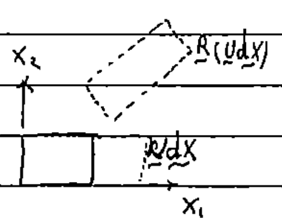
$(\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U})(\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{y}) = \lambda \underset{\sim}{y} \rightarrow (\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}^T)\underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y}$

$\underset{\sim}{V} \triangleq \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}\underset{\sim}{R}^T \longrightarrow \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{y} = \lambda \underset{\sim}{y}$

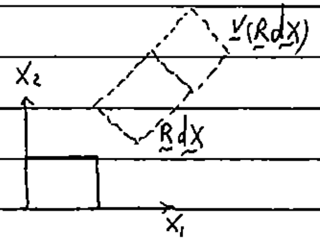
در نتیجه مقادیر ویژه $\underset{\sim}{V}$ با $\underset{\sim}{U}$ برابرند، بردارهای ویژه آنها، اگر $\underset{\sim}{x}$ بردار ویژه نظیر λ برای $\underset{\sim}{U}$، $\underset{\sim}{y}$ بردار ویژه نظیر λ برای $\underset{\sim}{V}$ باشد در انتظار $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{x}$ خواهد بود.

$\underset{\sim}{U}$ را تانسور راست اتساع (Right Stretch Tensor)، $\underset{\sim}{V}$ را تانسور چپ اتساع (Left Stretch Tensor) و $\underset{\sim}{R}$ را تانسور دوران (Rotation Tensor) گوییم.

$$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}\,d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}\,d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{R}(\underset{\sim}{U}\,d\underset{\sim}{X})$$
$$= \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R}\,d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{V}(\underset{\sim}{R}\,d\underset{\sim}{X})$$



ابتدا اتساع و سپس دوران



ابتدا دوران و سپس اتساع

مثال: تانسورهای $\underset{\sim}{U}$، $\underset{\sim}{R}$، $\underset{\sim}{V}$ را برای تغییر شکل زیر بیابید.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = -3X_3 \\ x_3 = 2X_2 \end{cases}$$

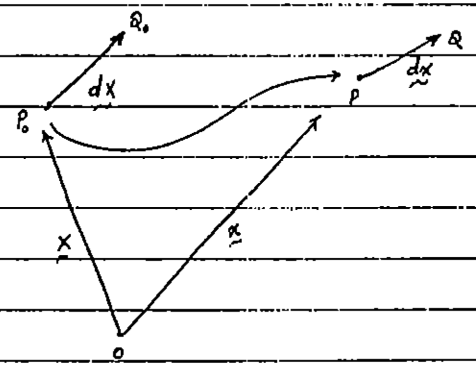
$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} \quad , \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{R}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deformation Measures & Strain Tensors.

سنجه‌های تغییر فرم و تانسورهای کرنش



$dS \triangleq |d\underset{\sim}{X}|$

$ds \triangleq |d\underset{\sim}{x}|$

$$dS^2 = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X} = dX_A \cdot dX_A = d\underset{\sim}{X}^T d\underset{\sim}{X}$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x} = dx_i \, dx_i = d\underset{\sim}{x}^T d\underset{\sim}{x}$$

$$= dx_i \, dx_i = x_{i,A} \, dX_A \cdot x_{i,B} \, dX_B$$

$$= x_{i,A} \, x_{i,B} \, dX_A \, dX_B = C_{AB} \, dX_A \, dX_B$$

$C_{AB} \triangleq x_{i,A} \, x_{i,B} \Rightarrow \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F}$ تانسور تغییر فرم گرین

لاگرانژی یا گرین

فرم مادی : $ds^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{X} = d\underset{\sim}{X}^T (\underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F}) d\underset{\sim}{X}$

$$= d\underset{\sim}{X}^T \underset{\sim}{C} \, d\underset{\sim}{X}$$

$$dS^2 = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X} = X_{A,i} \, dx_i \; X_{A,j} \, dx_j$$

$$= X_{A,i} \, X_{A,j} \, dx_i \, dx_j$$

$$= c_{ij} \, dx_i \, dx_j$$

$c_{ij} \triangleq X_{A,i} \, X_{A,j}$ تانسور تغییر فرم کوشی یا اویلری ($\underset{\sim}{c}$)

فرم فضایی : $dS^2 = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X} = d\underset{\sim}{X}^T d\underset{\sim}{X}$

$$= (\underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x}) \cdot (\underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x})$$

$$= d\underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{B}^{-1} d\underset{\sim}{x}$$

$\underset{\sim}{B} \triangleq \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} = (\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U})^T (\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}) = \underset{\sim}{U}^T \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}^2$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T = (\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R})(\underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R})^T = \underset{\sim}{V}\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{V}^T = \underset{\sim}{V}^2$$

$\underset{\sim}{C}$ را اصطلاحاً تانسور راست تغییر فرم و $\underset{\sim}{B}$ را اصطلاحاً تانسور چپ تغییر فرم گرین

$$ds^2 - dS^2 = C_{AB}\,dX_A\,dX_B - dX_A\,dX_A = 2E_{AB}\,dX_A\,dX_B$$

$$E_{AB} = \frac{1}{2}\left(C_{AB} - \delta_{AB}\right) \qquad E_{AB} = E_{BA}$$

E_{AB} را که یک تانسور لاگرانژی است ـ تانسور کرنش گرین گویند.

$$ds^2 - dS^2 = dx_i\,dx_i - X_{A,i}X_{B,j}\,dx_i\,dx_j = (\delta_{ij} - c_{ij})\,dx_i\,dx_j$$
$$= 2\,e_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - c_{ij}\right)$$

e_{ij} را که یک تانسور اویلری است ـ تانسور کرنش آلمانسی گویند.

$$\underset{\sim}{E} = \tfrac{1}{2}\left(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}\right) \qquad \underset{\sim}{e} = \tfrac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{c}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1}\right)$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{U}^2 \qquad \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{V}^2$$

$$ds^2 = C_{AB}\,dX_A\,dX_B = d\underset{\sim}{X}^T\,\underset{\sim}{C}\,d\underset{\sim}{X}$$

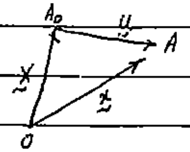
$$C_{AB} = x_{i,A}\,x_{i,B} = \underset{\sim}{x}_{,A}\cdot\underset{\sim}{x}_{,B}$$

$$dS^2 = c_{ij}\,dx_i\,dx_j = d\underset{\sim}{x}^T\,\underset{\sim}{c}\,d\underset{\sim}{x}$$

$$c_{ij} = X_{A,i}\,X_{A,j} = \underset{\sim}{X}_{,i}\cdot\underset{\sim}{X}_{,j}$$

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{AB}\,dX_A\,dX_B = 2\,e_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

مؤلفه‌های کرنش برحسب بردار جابجایی



$$\underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u} \qquad \underset{\sim}{u}: \text{ Displacement Vector}$$

$$\underset{\sim}{u} = \chi(\underset{\sim}{X}, t) - \underset{\sim}{X} = u_A\,\underset{\sim}{e}_A$$ بیان لاگرانژی

$$\underset{\sim}{u} = u(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{x} - \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t) = u_i\,\underset{\sim}{e}_i$$ بیان اویلری

$$\underset{\sim}{u} = u(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$C_{AB} = \underset{\sim}{x}_{,A}\cdot\underset{\sim}{x}_{,B} = (\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u})_{,A}\cdot(\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u})_{,B}$$
$$= (X_K\,\underset{\sim}{e}_K + u_K\,\underset{\sim}{e}_K)_{,A}\cdot(X_M\,\underset{\sim}{e}_M + u_M\,\underset{\sim}{e}_M)_{,B}$$
$$= (\delta_{KA}\,\underset{\sim}{e}_K + u_{K,A}\,\underset{\sim}{e}_K)\cdot(\delta_{MB}\,\underset{\sim}{e}_M + u_{M,B}\,\underset{\sim}{e}_M)$$
$$= (\underset{\sim}{e}_A + u_{K,A}\,\underset{\sim}{e}_K)\cdot(\underset{\sim}{e}_B + u_{M,B}\,\underset{\sim}{e}_M)$$
$$= \delta_{AB} + u_{A,B} + u_{B,A} + u_{M,A}\,u_{M,B}$$

$$\therefore\ E_{AB} = \tfrac{1}{2}(C_{AB} - \delta_{AB}) = \tfrac{1}{2}(u_{A,B} + u_{B,A} + u_{M,A}\,u_{M,B})$$

$$c_{ij} = \underset{\sim}{X}_{,i}\cdot\underset{\sim}{X}_{,j} = (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u})_{,i}\cdot(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{u})_{,j}$$
$$= (x_m\,\underset{\sim}{e}_m - u_m\,\underset{\sim}{e}_m)_{,i}\cdot(x_s\,\underset{\sim}{e}_s - u_s\,\underset{\sim}{e}_s)_{,j}$$
$$= (\delta_{mi}\,\underset{\sim}{e}_m - u_{m,i}\,\underset{\sim}{e}_m)\cdot(x_{s,j}\,\underset{\sim}{e}_s - u_{s,j}\,\underset{\sim}{e}_s)$$
$$= (\underset{\sim}{e}_i - u_{m,i}\,\underset{\sim}{e}_m)(\underset{\sim}{e}_j - u_{s,j}\,\underset{\sim}{e}_s)$$
$$= \delta_{ij} - u_{i,j} - u_{j,i} + u_{s,i}\,u_{s,j}$$

$$\therefore\ e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij}) = \tfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{m,i}\,u_{m,j})$$

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2 \right]$$

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 \right]$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

مثال: در یک تغییر شکل داریم $ds = dS$، در مورد این تغییر شکل تانسور $\underset{\sim}{C}$ ، $\underset{\sim}{B}$ چگونه خواهند بود؟

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{AB}\,dX_A\,dX_B = 2e_{ij}\,dx_i\,dx_j = 0$$

چون رابطهٔ فوق به ازاء هر $d\underset{\sim}{X}$ یا $d\underset{\sim}{x}$ دلخواه برقرار است لذا

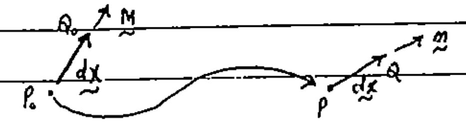
$E_{AB} \equiv 0$

$e_{ij} \equiv 0$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}) = 0 \quad \therefore \quad \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{I}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1}) = 0 \quad \therefore \quad \underset{\sim}{B}^{-1} = \underset{\sim}{I} \longrightarrow \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{I}$

Strech of a line element. اتساع یک المان خطی



Ref. Conf. Pres. Conf.

$\underset{\sim}{M}$ بردار یکه در راستای $d\underset{\sim}{X}$ است $(M_A M_A = 1)$ ، $\underset{\sim}{m}$ بردار یکه در راستای $d\underset{\sim}{x}$ است $(m_i m_i = 1)$.

$d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{M}\,dS \quad , \quad d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{m}\,ds$

$dX_A = M_A\,dS \quad , \quad dx_i = m_i\,ds$

$$\lambda \triangleq \frac{ds}{dS} \longrightarrow \begin{cases} 0 < \lambda < 1 & \text{انقباض Contraction} \\ \lambda > 1 & \text{انبساط expansion} \end{cases}$$

$ds\, m_i = dx_i = x_{i,A}\,dX_A = x_{i,A}\,M_A\,dS$

$\rightarrow \frac{ds}{dS} m_i = x_{i,A} M_A = m_i \lambda \quad \text{or} \quad \lambda \underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{M}$

$m_i m_i \lambda^2 = (x_{i,A} M_A)(x_{i,B} M_B) = x_{i,A} x_{i,B} M_A M_B$

$\therefore \quad \lambda^2 = C_{AB} M_A M_B \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt{C_{AB} M_A M_B}$

$$\lambda^2 = \langle M_1 \; M_2 \; M_3 \rangle \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$m_i \, dS = dx_i$

$M_A \, dS = dX_A = X_{A,i} \, dx_i \quad \therefore \; M_A M_A (dS)^2 = X_{A,i} X_{A,j} \, m_i m_j (dS)^2$

$\therefore \quad \lambda^{-2} = X_{A,i} X_{A,j} \, m_i m_j = C_{ij} m_i m_j$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{C_{ij} m_i m_j}} = \frac{1}{\sqrt{\underset{\sim}{m} \cdot \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{m}}}$$

$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V} \underset{\sim}{R}$

$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{U} d\underset{\sim}{X} \qquad d\underset{\sim}{X}' \triangleq \underset{\sim}{U} d\underset{\sim}{X} \rightarrow d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X}'$

$dX'_A = U_{AB} \, dX_B \longrightarrow dx_i = R_{iA} \, dX'_A$

ابتدا اتساع و بعد دوران داریم که در این حالت ابتدا اتساع در هیئت مرجع رخ می‌دهد و سپس با دوران به هیئت جاری می‌رسیم.

$|d\underset{\sim}{X}'|^2 = dX'_A \, dX'_A = (U_{AB} dX_B)(U_{AM} dX_M) = U_{AB} U_{AM} \, dX_B \, dX_M$

$= C_{BM} \, dX_B \, dX_M = (dS)^2$

$|d\underset{\sim}{X}'| = |d\underset{\sim}{X}| = dS$

$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{V} \underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X} \qquad d\underset{\sim}{x}' \triangleq \underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X} \rightarrow d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{V} d\underset{\sim}{x}'$

$dx'_i = R_{iA} \, dX_A \longrightarrow dx_i = V_{ij} \, dx'_j$

در این حالت ابتدا دوران از هیئت مرجع به هیئت نهایی رخ داده و اتساع در هیئت جاری رخ می‌دهد.

$|d\underset{\sim}{x}'|^2 = dx'_i \, dx'_i = (R_{iA} dX_A)(R_{iB} dX_B)$

$= R_{iA} R_{iB} \, dX_A \, dX_B$

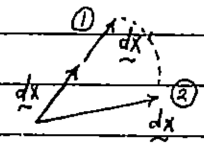
$= \delta_{AB} \, dX_A \, dX_B = dX_A \, dX_A = |d\underset{\sim}{X}|^2$

لذا $\underset{\sim}{R}$ مسئول دوران خالص است در نتیجه $\underset{\sim}{V}$ اتساع را مشخص می‌کند.

حال فرض کنید $d\underset{\sim}{X}$ در راستای یک جهت اصلی $\underset{\sim}{U}$ انتخاب شود

$d\underset{\sim}{X}' = \underset{\sim}{U} d\underset{\sim}{X} = \lambda \, d\underset{\sim}{X}$

$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X}'$



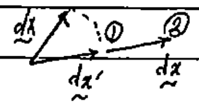
$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} \underset{\sim}{U}$

حال اگر $d\underset{\sim}{X}$ در راستای بردار ویژهٔ $\underset{\sim}{U}$ باشد، $\underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X}$ در راستای بردار ویژهٔ $\underset{\sim}{V}$ است.

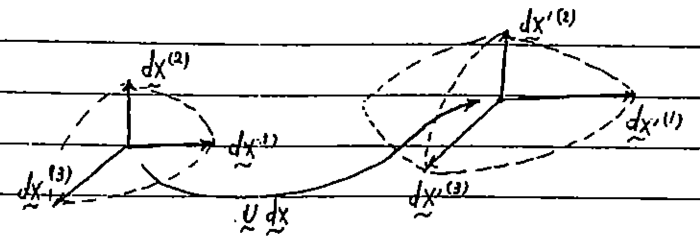
$d\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X}$

$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{V} d\underset{\sim}{x}'$

$\underset{\sim}{V} (\underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X}) = \lambda (\underset{\sim}{R} d\underset{\sim}{X})$



$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{V} \underset{\sim}{R}$



مقادیر ویژهٔ $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$ را مقادیر اصلی اتساع گوییم که همگی مثبت هستند.

$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{U}^2$ & $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{V}^2$

$eig(\underset{\sim}{B}) = eig(\underset{\sim}{C}) = (eig\,\underset{\sim}{U})^2 = (eig\,\underset{\sim}{V})^2$

مقادیر ویژهٔ $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{B}$ برابر مربع مقادیر اصلی اتساع می‌باشند

$\varphi(\lambda^2) = \det(\underset{\sim}{C} - \lambda^2 \underset{\sim}{I}) = \det(\underset{\sim}{B} - \lambda^2 \underset{\sim}{I}) =$

$= -\lambda^6 + I_1 \lambda^4 - I_2 \lambda^2 + I_3$

Characteristic Equation.

$I_1 = trace\ \underset{\sim}{B} = trace\ \underset{\sim}{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

$I_2 = \frac{1}{2}\left[(trace\ \underset{\sim}{B})^2 - (trace\ \underset{\sim}{B}^2)\right] = \frac{1}{2}\left[(tr\underset{\sim}{C})^2 - (tr\underset{\sim}{C}^2)\right]$

$= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$

$I_3 = \det \underset{\sim}{B} = \det \underset{\sim}{C} = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$

$= \frac{1}{6}\left[(tr\underset{\sim}{C})^3 - 3(tr\underset{\sim}{C})(tr\underset{\sim}{C}^2) + 2tr\underset{\sim}{C}^3\right]$

$A \longrightarrow \lambda$

$f(\underset{\sim}{A}) \longrightarrow f(\lambda)$ $\qquad trace\ \underset{\sim}{C}^2 = C_{AB} C_{BA} = C_{AB} C_{AB}$

$I_1 = C_{AA} = B_{ii}$

$I_2 = \frac{1}{2}\left[C_{AA}C_{BB} - C_{AB}C_{AB}\right] = \frac{1}{2}(B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ij})$

$I_3 = \det \underset{\sim}{C} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ABC}\,\varepsilon_{MND}\,C_{AM}C_{BN}C_{KD}$

$= \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnp}\,B_{im}B_{jn}B_{kp}$

تعبیر فیزیکی تانسور کرنش لاگرانژی

$\lambda^2 = C_{AB} M_A M_B$

$E_{AB} = \frac{1}{2}(C_{AB} - \delta_{AB})$

$\lambda^2 = (2E_{AB} + \delta_{AB}) M_A M_B = 2E_{AB} M_A M_B + 1$

$\therefore\ \lambda = (1 + 2E_{AB} M_A M_B)^{1/2}$

$e \triangleq \dfrac{ds - dS}{dS} = \lambda - 1 = \sqrt{2E_{AB} M_A M_B + 1} - 1$

e : extension

مثال ۱. المان خطی در راستای ۱ را در نظر بگیرید.

$\overset{(1)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ $\qquad \overset{(1)}{M}_1 = 1\ ;\ \overset{(1)}{M}_2 = 0\ ;\ \overset{(1)}{M}_3 = 0$

$\overset{(2)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$

$e_1 = (2E_{AB}\overset{(1)}{M}_A\overset{(1)}{M}_B + 1)^{1/2} - 1$

$\overset{(3)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

$= (2E_{11} + 1)^{1/2} - 1$

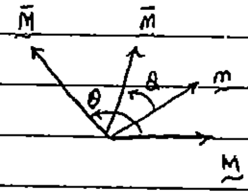
$e_2 = \sqrt{2E_{22}+1} - 1$, $e_3 = \sqrt{2E_{33}+1} - 1$

اگر کرنش‌های کوچک باشند در اینصورت $\sqrt{1+2x} \approx 1+x$ را خواهیم داشت:

$e_1 \approx E_{11}$ or $e_I \approx E_{II}$ $\quad I = 1,2,3$

لذا تغییر طول نسبی المانهای مادی که در راستای محورهای مختصات هستند با کرنش‌های نرمال مرتبط هستند.

مثال ۲. تغییر زاویه بین دو بردار را تعیین کنید



$\cos\Theta = \underline{M}\cdot\bar{\underline{M}} = M_A \bar{M}_A$

$\cos\vartheta = \underline{m}\cdot\bar{\underline{m}} = m_i \bar{m}_i$

$\lambda m_i = x_{i,A} M_A$ or $\lambda \underline{m} = \underline{F}\,\underline{M}$

اگر λ، $\bar{\lambda}$ به ترتیب اتساع المانهای مادی در راستای بردارهای M، $\bar{M}$ در هیئت مرجع باشند در اینصورت

$$\lambda = (2E_{AB} M_A M_B + 1)^{1/2} = \lambda$$

$$\bar{\lambda} = (2E_{AB} \bar{M}_A \bar{M}_B + 1)^{1/2}$$

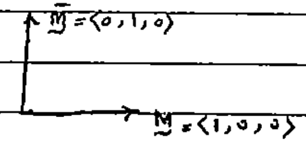
$$\lambda\bar{\lambda}\, m_i \bar{m}_i = x_{i,A}\, x_{i,B}\, M_A \bar{M}_B = C_{AB} M_A \bar{M}_B$$

$$= (2E_{AB} + \delta_{AB}) M_A \bar{M}_B$$

$$= 2E_{AB} M_A M_B + M_A \bar{M}_A$$

$$\lambda\bar{\lambda}\cos\vartheta = 2E_{AB} M_A \bar{M}_B + \cos\Theta$$

حال اگر فرض کنیم بردارهای $\underline{M}$، $\bar{\underline{M}}$ در راستای محورهای مختصات باشند در اینصورت داریم



$\Theta = \pi/2$

$$\cos\vartheta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{2E_{11}+1}\,\sqrt{2E_{22}+1}}$$

$$\cos\vartheta = \sin\gamma = \frac{2E_{12}}{\sqrt{2E_{11}+1}\,\sqrt{2E_{22}+1}} \qquad \vartheta = \pi/2 - \gamma$$

برای کرنش‌های بسیار کوچک $\sin\gamma \approx \gamma$ داریم، بنابراین: $\gamma = 2E_{12}$

مؤلفه‌های برشی تانسور کرنش گرین با زاویه برش ارتباط دارند.

Deformation Rate of Tensor
and Vorticity Tensor — تانسور نرخ تغییر فرم و تانسور گردابی

اگر $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ میدان سرعت در یک محیط پیوسته باشد در نظر بگیرید

تانسور $\underline{L}$ را که توسط رابطه

$$\underline{L} \triangleq \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \quad \text{or} \quad L_{ij} = V_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

تعریف می‌شود، تانسور گرادیان سرعت گویند (Velocity Gradient Tensor)

$$L_{ij} = 1/2\,(L_{ij} + L_{ji}) + 1/2\,(L_{ij} - L_{ji})$$

$$= 1/2\,(V_{i,j} + V_{j,i}) + 1/2\,(V_{i,j} - V_{j,i})$$

$d_{ij} \triangleq 1/2\,(V_{i,j} + V_{j,i})$: Rate of deformation tensor

$$\underline{D} = 1/2\,(\underline{L} + \underline{L}^T)$$

$\omega_{ij} \triangleq 1/2\,(V_{i,j} - V_{j,i})$: Vorticity Tensor

$$\underline{W} = 1/2\,(\underline{L} - \underline{L}^T)$$

$$\begin{cases} d_{ij} = d_{ji} \\ \underline{D} = \underline{D}^T \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{ij} = -\omega_{ji} \\ \underline{W} = -\underline{W}^T \end{cases} \qquad \underline{L} = \underline{D} + \underline{W}$$

$$\lambda m_i = x_{i,A} M_A \qquad \lambda \underline{m} = \underline{F}\,\underline{M}$$

$$\dot\lambda m_i + \lambda \dot m_i = \dot{x}_{i,A} M_A + x_{i,A} \dot M_A$$

$$= V_{i,A} M_A = V_{i,j}\, x_{j,A} M_A$$

$$= \lambda V_{i,j} m_j$$

از طرفی چون $m_i m_i = 1$ است در نتیجه $m_i \dot m_i = 0$ خواهد بود

$$\therefore (\dot\lambda m_i + \lambda \dot m_i = \lambda V_{i,j} m_j)\, m_i$$

$$\Rightarrow \dot\lambda = \lambda V_{i,j} m_i m_j = \lambda (d_{ij} + \omega_{ij}) m_i m_j = \lambda d_{ij} m_i m_j$$

$$\Rightarrow \frac{\dot\lambda}{\lambda} = d_{ij} m_i m_j = \frac{d}{dt} \ln \lambda = \underline{m}^T \underline{D}\, \underline{m}$$

اگر $\underline{m}$ در راستای بردار ویژه $\underline{D}$ در نظر گرفته شود در این صورت داریم:

$$\underline{D}\,\underline{m} = \beta \underline{m}$$

$d_{ij} m_j = \beta m_i \longrightarrow \beta = d_{ij} m_i m_j = \dot\lambda / \lambda$ (نرخ لگاریتمی است

اگر بردار محوری تانسور پادمتقارن w_{ij} را ω_i بنامیم

$$\omega_i = -1/2\, \varepsilon_{ijk} W_{jk}$$

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\, \omega_k$$

SIMARA

$$W \triangleq \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{1jk} W_{jk} = -\tfrac{1}{2} W_{23} + \tfrac{1}{2} W_{32} = -W_{23}$$

$$\omega_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left[\tfrac{1}{2}(V_{j,k} - V_{k,j})\right] = -\tfrac{1}{4}\varepsilon_{ijk} V_{j,k} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{ijk} V_{k,j}$$

$$\underset{\sim}{\omega} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Curl}\,\underset{\sim}{V} = \tfrac{1}{2}\,\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{V}$$

اگر $\underset{\sim}{m}$ در راستای بردار ویژه $\underset{\sim}{D}$ باشد در این صورت داریم.

$$\dot{\lambda} m_i + \lambda \dot{m}_i = \lambda V_{i,j} m_j = (\tfrac{1}{2}\lambda d_{ij} m_j + \tfrac{1}{2}\lambda W_{ij} m_j)2$$

$$= \lambda d_{ij} m_j + \lambda W_{ij} m_j$$

$$= \lambda \beta m_i + \lambda W_{ij} m_j$$

$$= \lambda \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} m_i + \lambda W_{ij} m_j$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \dot{m}_i = \lambda \omega_{ij} m_j \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_i = W_{ij} m_j$$

$$\omega_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{jk}$$

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k$$

$$\dot{m}_i = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k m_j = \varepsilon_{ikj}\,\omega_k m_j \qquad \dot{\underset{\sim}{m}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{m}$$

یعنی $\underset{\sim}{\omega}$ سرعت زاویه‌ای بردار $\underset{\sim}{m}$ است.

مثال ۱. تغییر فرم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{at} & a > b \geq 0 \\ x_2 = X_2 e^{-bt} & \\ x_3 = X_3 & t \geq 0 \end{cases}$$

الف) تغییر طول نسبی (extension) المانهای مادی را که در هیئت مرجع در راستای خطوط مختصات هستند بدست آورید.

ب) نرخ لگاریتمی اتساع $(\dot{\lambda}/\lambda)$ المانهای مادی در هیئت فعلی در راستای بردارهای ویژه $\underset{\sim}{D}$ و همچنین سرعت زاویه‌ای آنها را حساب کنید.

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{e^{at}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{e^{-bt}}\right)^2 + (x_3)^2 = 1$$

تغییر شکل فوق بیان‌گر این است که کره واحد به یک بیضی‌گون تبدیل می‌شود. بعد سوم آن ثابت می‌ماند

$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} e^{at} & & 0 \\ & e^{-bt} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = F(t) \longrightarrow$$ تغییر فرم همگن

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} e^{2at} & & \\ & e^{-2bt} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 = C_{AB} M_A M_B$$

$$e = \lambda - 1$$

$$\overset{(1)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 1, 0, 0 \rangle \Rightarrow e_1 = e^{at} - 1 > 0 \Rightarrow \text{expansion.}$$

$$\overset{(2)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 0, 1, 0 \rangle \Rightarrow e_2 = e^{-bt} - 1 < 0 \Rightarrow \text{Contraction}$$

$$\overset{(3)}{\underset{\sim}{M}} = \langle 0, 0, 1 \rangle \Rightarrow e_3 = 0 \Rightarrow$$ تغییر طول نداریم.

$$\begin{cases} V_1 = a X_1 e^{at} = a x_1 \\ V_2 = -b X_2 e^{-bt} = -b x_2 \\ V_3 = 0 \end{cases} \qquad \underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{L}$ & $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{0}$ تغییر فرم غیر گردشی داریم :

$$\left(\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right)_1 = a \qquad \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right)_2 = -b \qquad \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right)_3 = 0$$

مثال ۲. در بخشهای مثال (۱) در خصوص تغییر فرم مقابل پاسخ دهید.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + k(t) X_2 \\ x_2 = X_2 & k(t) \geq 0 \\ x_3 = X_3 & \dot k(t) > 0 \end{cases}$$

کاملاً واضح است که در تغییر فرم برشی است زیرا x_2, x_3 ثابت هستند و x_1 بر حسب فاصله از صفحه X_1X_3 زیاد می‌شود.

$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 = 0$

$e_2 = \sqrt{1+k^2} - 1 > 0$ extension

$e_3 = 0$

$$\begin{cases} V_1 = \dot K X_2 = \dot K x_2 \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{1,2} = \dot K$$

بقیه مؤلفه‌های گرادیان سرعت صفر هستند.

$$\underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} 0 & \dot k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{D} = \begin{pmatrix} 0 & \dot K/2 & 0 \\ \dot K/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{W} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \dot k & 0 \\ -\dot k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

معادله مشخصه : $\beta(\beta^2 - \dot K^2/4) = 0$

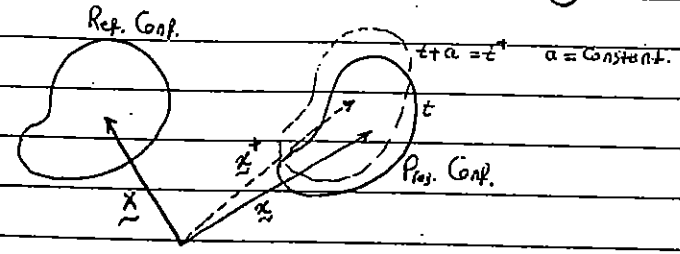
$$\begin{cases} (\dot\lambda/\lambda)_1 = \dot k/2 > 0 \\ (\dot\lambda/\lambda)_2 = -\dot k/2 < 0 \\ (\dot\lambda/\lambda)_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} & W_{12} = -W_{21} = \dot k/2 \\ & W_{13} = -W_{31} = 0 \\ & \omega_i = -1/2\, \varepsilon_{ijk} W_{jk} \\ & \omega_1 = 0 \ , \ \omega_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\omega_3 = 1/2\, \varepsilon_{3jk} W_{jk} = 1/2 \left(\varepsilon_{312} W_{12} + \varepsilon_{321} W_{21}\right) = -\dot k/2$$

$$\underset{\sim}{\omega} = -\dot k/2\, \underset{\sim}{e}_3$$

Superposed Rigid Body Motion.

حرکت صلب الحاقی



فرض کنید:

حرکت جسم از زمان t تا t^+ یعنی در محدوده زمانی $\langle t, t+a\rangle$ صلب باشد. در اینصورت

$$\underset{\sim}{x}^+ = \chi^+(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t) \\ \underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t) \end{cases} \longrightarrow \underset{\sim}{x}^+ = \chi^+[\chi^{-1}(\underset{\sim}{x},t),t] = \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t)$$

$$|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}| = |\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{y}^+| \quad \forall\ \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}$$

$$\underset{\sim}{x}^+ = \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t) \qquad \underset{\sim}{y}^+ = \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{y},t)$$

$$[\bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t) - \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{y},t)]\cdot[\bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t) - \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{y},t)] =$$

$$= (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})\cdot(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \quad \forall\ \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$$

یا بصورت اندیسی

$$[\bar{\chi}_i^+(x_m,t) - \bar{\chi}_i^+(y_m,t)]\cdot[\bar{\chi}_i^+(x_n,t) - \bar{\chi}_i^+(y_n,t)] =$$

$$= (x_i - y_i)(x_i - y_i) \quad \forall\ x_i, y_i$$

از طرفین رابطه اخیر نسبت به x_j مشتق می‌گیریم

$$2\frac{\partial \bar{\chi}_i^+}{\partial x_j}[\bar{\chi}_i^+(x_m,t) - \bar{\chi}_i^+(y_m,t)] = 2(x_j - y_j)$$

حال نسبت به y_k مشتق می‌گیریم در اینصورت داریم،

$$\frac{\partial \bar{\chi}_i^+(\underset{\sim}{x},t)}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{\chi}_i^+(\underset{\sim}{y},t)}{\partial y_k} = \delta_{jk}$$

یا بصورت ماتریسی

$$\left[\frac{\partial \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t)}{\partial \underset{\sim}{x}}\right]^T\left[\frac{\partial \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{y},t)}{\partial \underset{\sim}{y}}\right] = \underset{\sim}{I}$$

$$\therefore \frac{\partial \bar{\chi}^+(\underset{\sim}{x},t)}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{Q}(t) \quad , \quad \underset{\sim}{Q}^T(t)\,\underset{\sim}{Q}(t) = \underset{\sim}{I}$$

برای حالت خاص که $\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{x}$ ، $\underset{\sim}{Q}(t) = \underset{\sim}{I}$ ، $\det \underset{\sim}{Q}(t) = 1$

$$\frac{\partial x_i^+}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

در حالت کلی داریم،

$$\frac{\partial x_i^+}{\partial x_j} = Q_{ij}(t)$$

$$\Rightarrow x_i^+ = Q_{ij}(t)\,x_j + a_i(t)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{x}^{+}}{\partial \underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{Q}(t) \Rightarrow \underset{\sim}{x}^{+} = \underset{\sim}{Q}(t)\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}(t) \qquad \det \underset{\sim}{Q} = 1$$

شرط لازم و کافی برای آنکه حرکت صلب باشد این است که

$$x_i^{+} = Q_{ij}(t)\, x_j + a_i(t)$$

$$Q^{T}_{ij}\, Q_{jk} = \delta_{ik}$$

در حرکت صلب فاصله بین نقاط و زاویه بین خطوط ثابت می‌ماند

$$|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}|^2 = (\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+})\cdot(\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+})$$

$$\underset{\sim}{x}^{+} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a} \quad , \quad \underset{\sim}{y}^{+} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{a}$$

$$|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}| = |\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})|$$

$$|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}|^2 = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \cdot \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})$$

$$= (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \cdot \underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})$$

$$= (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})$$

$$= |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}|^2$$

یا بصورت اندیسی

$$|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}|^2 = (x_i^{+} - y_i^{+})(x_i^{+} - y_i^{+})$$

$$= Q_{ij}(x_j - y_j)\, Q_{ik}(x_k - y_k)$$

$$= Q_{ij} Q_{ik} (x_j - y_j)(x_k - y_k)$$

$$= \delta_{jk}(x_j - y_j)(x_k - y_k) = (x_j - y_j)(x_j - y_j) = |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}|^2$$

حال اگر زاویه بین را بررسی کنیم

$$\cos\theta^{+} = \frac{\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}}{|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{y}^{+}|} \cdot \frac{\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{z}^{+}}{|\underset{\sim}{x}^{+} - \underset{\sim}{z}^{+}|}$$

$$\cos\theta^{+} = \frac{\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}|} \cdot \frac{\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z}|} = \frac{(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \cdot \underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}| \cdot |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z}|}$$

$$= \frac{(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \cdot (\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z})}{|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}| \cdot |\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{z}|} = \cos\theta \qquad \therefore \theta^{+} = \theta$$

$$\underset{\sim}{v}^{+} = \frac{d\underset{\sim}{x}^{+}}{dt^{+}} = \frac{d\underset{\sim}{x}^{+}}{dt}\frac{dt}{dt^{+}} \qquad t^{+} = t + a \longrightarrow \frac{dt}{dt^{+}} = 1$$

$$\underset{\sim}{v}^{+} = \frac{d\underset{\sim}{x}^{+}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{x}} + \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{x} + \dot{\underset{\sim}{a}}$$

$$v_i^{+} = Q_{ij} v_j + \dot{Q}_{ij} x_j + \dot{a}_i$$

تانسور $\underset{\sim}{\Omega}(t)$ را توسط رابطه $\Omega(t) \triangleq \dot{\underset{\sim}{Q}}(t)\,\underset{\sim}{Q}^{T}(t)$ تعریف می‌کنیم به عبارت دیگر

$$\dot{\underset{\sim}{Q}}(t) = \underset{\sim}{\Omega}(t)\,\underset{\sim}{Q}(t)$$

حال ثابت می‌کنیم تانسور $\underset{\sim}{\Omega}(t)$ پادمتقارن است

$$\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{Q}^{T} = \underset{\sim}{I} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\,\dot{\underset{\sim}{Q}}^{T} + \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^{T} = \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{\Omega}^{T} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{\Omega}(t) = -\underset{\sim}{\Omega}^{T}(t)$$

حال اگر بردار محوری تانسور پادمتقارن $\underset{\sim}{\Omega}$ را $\underset{\sim}{\omega}$ بنامیم داریم:

$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \qquad \Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$

$\underset{\sim}{\Omega}(t)\cdot\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{V}$

در این صورت داریم:

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x} + \dot{\underset{\sim}{a}}$

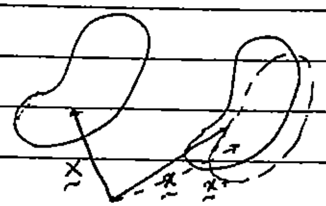
$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a} \Rightarrow \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$v_k^+ = Q_{kj}v_j + \varepsilon_{ijk}\omega_i(x_j^+ - a_j) + \dot{a}_k$

به عنوان مثال برای یک حرکت صلب معمولی



$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{X} + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{\Omega}\underset{\sim}{Q}\cancel{\underset{\sim}{X}} + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

اگر رابطه‌ی فوق برای دو نقطه‌ی مختلف جسم صلب نوشته شود

$\underset{\sim}{v}_A^+ = \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}_A^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\underset{\sim}{v}_B^+ = \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}_B^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\underset{\sim}{v}_A^+ - \underset{\sim}{v}_B^+ = \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}_A^+ - \underset{\sim}{x}_B^+)$ یعنی سرعت نسبی دو نقطه از جسم صلب است

$F_{iA} = x_{i,A} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_A}$

$F_{iA}^+ = \dfrac{\partial x_i^+}{\partial X_A} = \dfrac{\partial x_i^+}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial X_A} = Q_{ij}F_{jA} \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{F}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}$

$x_i^+ = Q_{ij}x_j + a_i$

$\underset{\sim}{C}^+ = (\underset{\sim}{F}^+)^T(\underset{\sim}{F}^+) = (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})^T(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{C}$

$\underset{\sim}{E}^+ = \underset{\sim}{E}$

$\underset{\sim}{B}^+ = (\underset{\sim}{F}^+)(\underset{\sim}{F}^+)^T = (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}^T) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{Q}^T$

$C_{ij}^+ = \dfrac{\partial X_A}{\partial x_i^+}\dfrac{\partial X_A}{\partial x_j^+} = \left(\dfrac{\partial X_A}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial x_i^+}\right)\left(\dfrac{\partial X_A}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_j^+}\right)$

$= Q_{im}X_{A,m}\cdot Q_{jn}X_{A,n} = Q_{im}Q_{jn}C_{mn}$

$\underset{\sim}{C}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{Q}^T \qquad (\underset{\sim}{B}^{-1})^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{B}^{-1}\underset{\sim}{Q}^T$

$\underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1}) \longrightarrow \underset{\sim}{e}^+ = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - (\underset{\sim}{B}^{-1})^+)$

$\therefore \underset{\sim}{e}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}\underset{\sim}{Q}^T$

$$\underset{\sim}{L}^+ = \frac{\partial \underset{\sim}{V}^+}{\partial \underset{\sim}{x}^+} \quad \text{or} \quad L^+_{ij} = \frac{\partial V^+_i}{\partial x^+_j}$$

$$L^+_{ij} = \frac{\partial V^+_i}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x^+_j} = Q_{jm}\frac{\partial V^+_i}{\partial x_m} = Q_{jm}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(Q_{in}V_n + \dot{Q}_{in}x_n + \dot{a}_i\right)$$

$$= Q_{jm}Q_{in}\frac{\partial V_n}{\partial x_m} + Q_{jm}\dot{Q}_{in}\delta_{nm}$$

$$= Q_{in}Q_{jm}L_{nm} + \dot{Q}_{im}Q_{jm}$$

$$L^+_{ij} = Q_{in}Q_{jm}L_{nm} + \dot{Q}_{im}Q_{jm}$$

$$\underset{\sim}{L}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^T + \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T \Rightarrow \underset{\sim}{L}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega}$$

$$\underset{\sim}{D}^+ = \tfrac{1}{2}\left(\underset{\sim}{L}^+ + (\underset{\sim}{L}^+)^T\right)$$

$$(\underset{\sim}{L}^+)^T = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{Q}^T - \underset{\sim}{\Omega}^T \Rightarrow \underset{\sim}{D}^+ = \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{Q}\left(\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{L}^T\right)\underset{\sim}{Q}^T$$

$$= \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega} \qquad = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

$$d^+_{ij} = Q_{im}Q_{jn}d_{mn}$$

$$\underset{\sim}{W}^+ = \tfrac{1}{2}\left[\underset{\sim}{L}^+ - (\underset{\sim}{L}^+)^T\right] = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega}$$

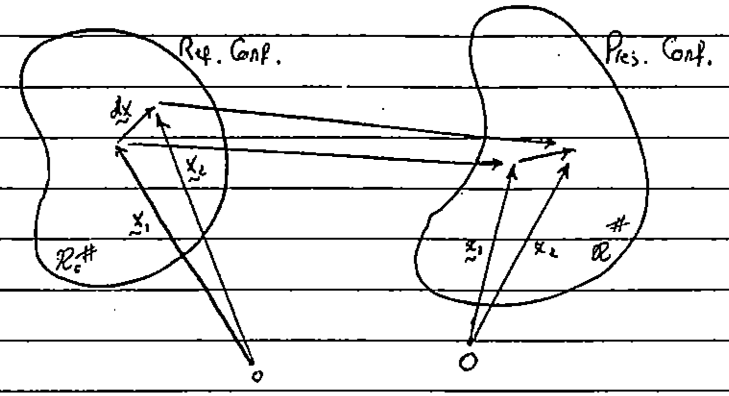
$$J = \det \underset{\sim}{F}$$

$$J^+ = \det F^+ = \det(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}) = \det(\underset{\sim}{Q})\det \underset{\sim}{F} = J$$

$$J^+ = J$$

Linear Theory

تئوری خطی - تغییر شکل‌های بسیار کوچک



$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u} \quad \text{or} \quad x_i = X_i + u_i$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial X_j} = F_{mJ} = \delta_{mJ} + u_{i,J} \quad \text{or} \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

چنانچه $\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \ll 1$ باشد، می‌گوییم تغییر شکل‌های خیلی کوچک داریم یا تئوری خطی از نظر هندسی داریم. پس در تئوری خطی با برقراری شرط فوق می‌توان از توان‌های دوم به بالای گرادیان تغییر مکان یا سرعت در محاسبات صرف‌نظر کرد.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial X_m}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\left(\delta_{mj} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_m}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_m}{\partial X_n}\left(\delta_{nj} - \frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_m}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_m}{\partial X_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$$

$$\simeq \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

حالت تغییر شکل‌های کوچک : $\|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| \ll 1$;

$$\therefore \ \vec{\nabla}_X \mathbf{u} \triangleq \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

$$\vec{\nabla}_x \mathbf{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}$$

$$= \mathbf{I} - [\mathbf{I} + (\mathbf{F} - \mathbf{I})]^{-1}$$

$$= \mathbf{I} - [\mathbf{I} - (\mathbf{F} - \mathbf{I}) + (\mathbf{F} - \mathbf{I})^2 - (\mathbf{F} - \mathbf{I})^3 + \cdots]$$

$$= (\mathbf{F} - \mathbf{I}) - (\mathbf{F} - \mathbf{I})^2 + (\mathbf{F} - \mathbf{I})^3 - \cdots$$

$$\approx \vec{\nabla}_X \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

$$\therefore \ \vec{\nabla}_x \mathbf{u} \approx \vec{\nabla}_X \mathbf{u} \quad or \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad s.t \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \ll 1$$

حال به بررسی مؤلفه‌های کرنش گرین و آلمانسی در فرآیند تغییر شکل‌های کوچک می‌پردازیم.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \approx e_{ij} \quad \text{Infinitisimal Strain Tensor}$$

در تئوری خطی از نظر هندسی یا تغییر شکل‌های کوچک اختلاف و تمایز بین کرنش‌های لاگرانژی و اویلری از بین می‌رود.

کرنش‌های اصلی و بردار مود : معادلات سازگاری ؛ آخر جزوه

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \triangleq \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T] \rightarrow \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\, d\mathbf{X} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})\, d\mathbf{X} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})\, d\mathbf{X}$$

حال اگر بردار محوری متناظر با تانسور $\boldsymbol{\Omega}$ را $\boldsymbol{\omega}$ بنامیم در این صورت داریم :

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \quad ; \quad \Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k$$

$\boldsymbol{\omega}$ بردار چرخش بسیار کوچک است ؛ در تئوری تغییر شکل‌های کوچک تمایز بین تانسورهای مرجع یعنی لاگرانژی و اویلری از بین می‌رود و هیئت مرجع و هیئت تغییر شکل یافته به جای همدیگر قرار دارند.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{E}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2} \approx \mathbf{I} + \mathbf{E} \qquad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega}$$

$$V_i = \dot{u}_i \qquad d_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\right] = \dot{E}_{ij}$$

تانسور $\quad w_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})\right]$

$$= \dot{\Omega}_{ij}$$

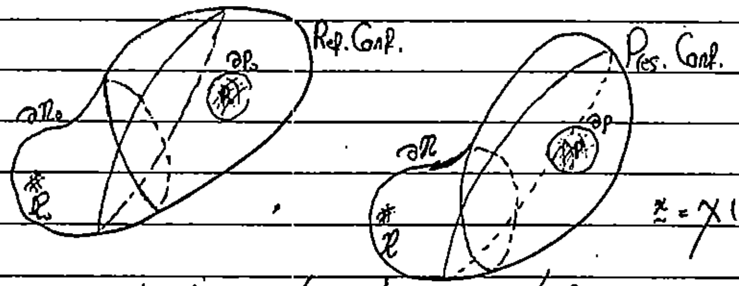
$w_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{jk}$ $\therefore\ w_i = \dot{w}_i$

خطوط، سطوح و احجام مادی

Material line.

Material Surface.

Material Volume.



$x = \chi(X_1, X_2, X_3, t)$

حجم مادی به مقداری ماده مشخص به حجم معینی را اشغال کرده و توسط سطح مادی محصور شده باشد گفته می‌شود

$X_A = X_A(S)$ $A = 1,2,3$

$x_i = \chi_i(X_1(S), X_2(S), X_3(S), t)$ $i = 1,2,3$

Matrial line in Pres. Conf.

$X_A = X_A(U_1, U_2)$

$A = 1,2,3$

Matrial Surface in Ref. Conf.

$x_i = \chi_i(X_1(U_1,U_2); X_2(U_1,U_2); X_3(U_1,U_2); t) = \chi_i(U_1, U_2, t)$

Material Surface in Pres. Conf.

در خصوص سطوح مادی $X_A = \chi_A(V_1, V_2)$ به ازای $A=1,2,3$ معرف ۳ معادله است که اگر V_1, V_2 را بین آنها حذف کنیم یک معادله به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} F(X_1, X_2, X_3) = 0 \\ F(X) = 0 \end{cases}$$

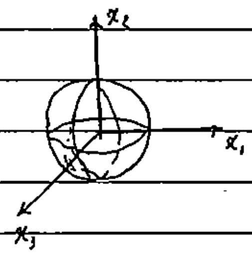
به عنوان مثال معادله کره به صورت $(X_1)^2+(X_2)^2+(X_3)^2-1=0$ در هیئت فعلی که مبین کره به شعاع واحد است. معادله سطح مادی در هیئت فعلی به صورت $f(x,t)=0$ بیان می‌شود

$F(X) = 0$

$x = \chi(X,t) \rightarrow X = \chi^{-1}(x,t)$

$\Rightarrow F[X] = F[\chi^{-1}(x,t)] = f(x,t) = 0$

به عنوان مثال مجدداً کره واحد را در نظر بگیرید این بار در هیئت فعلی



$$\begin{cases} x_1 = \sin U_1 \cos U_2 \\ x_2 = \sin U_1 \sin U_2 \\ x_3 = \cos U_1 \end{cases}$$

$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1$

دستگاه مختصاتی که روی رویه قرار می‌گیرد دستگاه مختصات گوسی نامیده می‌شود

معیار لاگرانژ برای تشخیص رویهٔ مادی: شرط لازم و کافی برای اینکه رویهٔ $f(\underset{\sim}{x},t)=0$ مادی باشد آن است که $\dot f(\underset{\sim}{x},t)=0$ یعنی مشتق مادی f برابر صفر باشد.

$$\dot f = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

$$f(\underset{\sim}{x},t)=0$$

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X},t) \longrightarrow \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underset{\sim}{x},t)$$

$$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x},t) = f[\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X},t),t] = F(\underset{\sim}{X},t) = F(\underset{\sim}{X})$$

چون در هیئت مرجع معادلهٔ سطح مادی بصورت $F(\underset{\sim}{X})=0$ بیان می‌شود، لذا $\dot F(\underset{\sim}{X})=0$ است. به بیان دیگر شرط لازم برای اینکه $f(\underset{\sim}{x},t)=0$ یک سطح مادی باشد آن است که $\dot f=0$ و برعکس اگر $\dot f=0$ باشد نتیجه می‌گیریم

$$f \cdot f(\underset{\sim}{x},t) = F(\underset{\sim}{X}) = 0$$

یعنی f مستقل از زمان است.

مثال: در تغییر شکل زیر آیا رویهٔ داده شده یک رویهٔ مادی است؟

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{at} \\ x_2 = X_2 e^{-bt} \\ x_3 = X_3 \end{cases} \qquad f(\underset{\sim}{x},t) = x_1 e^{-at} + x_2 e^{bt} + x_3 - 1$$

$$f(\underset{\sim}{x},t) = X_1 + X_2 + X_3 - 1 = F(\underset{\sim}{X})$$

لذا سطح مربوط یک سطح مادی است.

یا بصورت دیگر:

$$\dot f(\underset{\sim}{x},t) = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= -a x_1 e^{-at} + b x_2 e^{bt} + v_1 e^{-at} + v_2 e^{bt} + v_3$$

$$= -a x_1 e^{-at} + b x_2 e^{bt} + a X_1 e^{at} \cdot e^{-at} - b X_2 e^{-bt} \cdot e^{bt} + 0$$

$$= -a x_1 e^{-at} + b x_2 e^{bt} + a X_1 - b X_2$$

$$= -a X_1 + b X_2 + a X_1 - b X_2 = 0$$

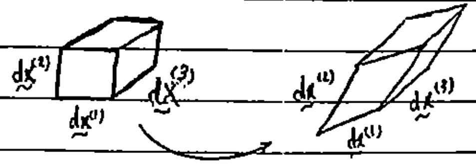
$$\therefore \dot f(\underset{\sim}{x},t) = 0$$

$\mathcal{L}$: $x_1 = U_1$ & $x_2 = U_2 \Rightarrow X_3 = 1 - U_1 - U_2$

$$\begin{cases} X_1 = U_1 = x_1 e^{-at} \\ X_2 = U_2 = x_2 e^{bt} \\ X_3 = 1 - U_1 - U_2 = x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = U_1 e^{at} \\ x_2 = U_2 e^{-bt} \\ x_3 = 1 - U_1 - U_2 \end{cases}$$

$$x_i = \hat{x}_i(U_1, U_2, t)$$

بررسی المان حجم در اثر تغییر فرم



$$dV = d\underset{\sim}{X}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{X}^{(2)} \times d\underset{\sim}{X}^{(3)} \quad \& \quad dv = d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} \times d\underset{\sim}{x}^{(3)}$$

$$dV = \varepsilon_{ABC}\, dX_A^{(1)}\, dX_B^{(2)}\, dX_C^{(3)}$$

$$d\underset{\sim}{x}^{(1)} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}^{(1)} \;;\; d\underset{\sim}{x}^{(2)} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}^{(2)} \;;\; d\underset{\sim}{x}^{(3)} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}^{(3)}$$

$$dx_i^{(1)} = F_{iA}\, dX_A^{(1)} = x_{i,A}\, dX_A^{(1)}$$

$$dv = \varepsilon_{ijk}\, dx_i^{(1)}\, dx_j^{(2)}\, dx_k^{(3)} = \varepsilon_{ijk}\, F_{iA} F_{jB} F_{kC}\, dX_A^{(1)}\, dX_B^{(2)}\, dX_C^{(3)}$$

$$= J\, \varepsilon_{ABC}\, dX_A^{(1)}\, dX_B^{(2)}\, dX_C^{(3)}$$

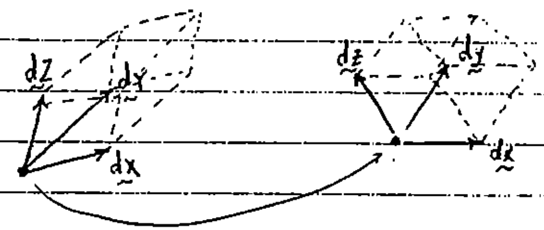
$$= J\, dV$$

$$\therefore\ J = \det \underset{\sim}{F} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A}\right) = \frac{dv}{dV} > 0$$

J ژاکوبین تبدیل نامیده می‌شود در فرآیند تغییر فرم $x_i = \chi(\underset{\sim}{X}, t)$، ژاکوبین تبدیل باید همیشه بزرگتر از صفر باشد. در واقع $J = dv/dV$ یعنی تعبیر فیزیکی J است که نسبت المان حجم در هیئت فعلی به مرجع را بیان می‌کند. J تابعی از $\underset{\sim}{X}$ و t است $J = J(\underset{\sim}{X}, t)$ داریم به صورت موضعی اگر:

$\mathcal{L}: J > 1 \rightarrow$ expansion $\quad \& \quad \mathcal{L}: J < 1 \longrightarrow$ Contraction.

یک تعبیر هندسی دیگر



$$J\varepsilon_{ABC} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_j}{\partial X_B} \frac{\partial x_k}{\partial X_C} = \varepsilon_{ijk}\, F_{iA} F_{jB} F_{kC}$$

$$dV = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{Y} \times d\underset{\sim}{Z} = \varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dY_B\, dZ_C$$

$$dv = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{y} \times d\underset{\sim}{z} = [d\underset{\sim}{x}, d\underset{\sim}{y}, d\underset{\sim}{z}]$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, dx_i\, dy_j\, dz_k = \varepsilon_{ijk}\, F_{iA} dX_A\, F_{jB} dY_B\, F_{kC} dZ_C$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, F_{iA} F_{jB} F_{kC} \cdot dX_A\, dY_B\, dZ_C$$

$$= J\varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dY_B\, dZ_C$$

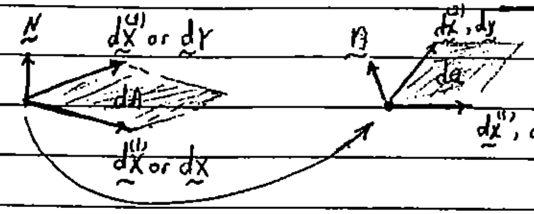
$$= J\, dV$$

$$\therefore\ J = dv/dV > 0$$

$\mathcal{L}: 0 < J < 1 \longrightarrow$ Contraction یا به صورت موضعی انقباض

$\mathcal{L}\quad J > 1 \longrightarrow$ expansion یا به صورت موضعی انبساط

بررسی المان سطح در اثر تغییر شکل



$$\| d\underset{\sim}{X} \times d\underset{\sim}{Y} \| = \| d\underset{\sim}{X} \| \cdot \| d\underset{\sim}{Y} \| \cdot \sin(d\underset{\sim}{X}, d\underset{\sim}{Y}) = dA = \| d\underset{\sim}{A} \|$$

$$\| d\underset{\sim}{x} \times d\underset{\sim}{y} \| = \| d\underset{\sim}{x} \| \cdot \| d\underset{\sim}{y} \| \cdot \sin(d\underset{\sim}{x}, d\underset{\sim}{y}) = da = \| d\underset{\sim}{a} \|$$

$$d\underset{\sim}{X} \times d\underset{\sim}{Y} = dA\, \underset{\sim}{N} \quad , \quad d\underset{\sim}{x} \times d\underset{\sim}{y} = da\, \underset{\sim}{n}$$

$$d\underset{\sim}{X} \times d\underset{\sim}{Y} = dX_A\, \underset{\sim}{e}_A \times dY_B\, \underset{\sim}{e}_B$$

$$= \varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dX_B\, \underset{\sim}{e}_C$$

$$= dA\, \underset{\sim}{N} = dA\, N_c\, \underset{\sim}{e}_c$$

$$\therefore \quad dA\, N_c = \varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dX_B$$

$$d\underset{\sim}{x} \times d\underset{\sim}{y} = dx_i\, \underset{\sim}{e}_i \times dy_j\, \underset{\sim}{e}_j$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, dx_i\, dy_j\, \underset{\sim}{e}_k = d\underset{\sim}{a} = da\, \underset{\sim}{n} = da\, n_k\, \underset{\sim}{e}_k$$

$$\therefore \quad da\, n_k = \varepsilon_{ijk}\, dx_i\, dy_j$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, F_{iA}\, F_{jB}\, dX_A\, dY_B \qquad (*)$$

از طرفی داریم :

$$\varepsilon_{ABC}\, J = \varepsilon_{ijk}\, F_{iA}\, F_{jB}\, F_{kC}$$

$$\varepsilon_{ABC}\, J = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_j}{\partial X_B} \frac{\partial x_k}{\partial X_C}$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را در $\frac{\partial X_c}{\partial x_m}$ ضرب کنیم داریم :

$$\varepsilon_{ABC}\, J\, X_{C,m} = \varepsilon_{ijk}\, F_{iA}\, F_{jB} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_C} \frac{\partial X_C}{\partial x_m}}_{=\delta_{km}}$$

$$= \varepsilon_{ijm}\, F_{iA}\, F_{jB}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{ijk}\, F_{iA}\, F_{jB} = J\, \varepsilon_{ABC}\, X_{C,k}$$

حال با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (*) داریم :

$$da\, n_k = J\, \varepsilon_{ABC}\, X_{C,k}\, dX_A\, dY_B = J\, X_{C,k} \left(\varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dY_B \right)$$

$$= J\, X_{C,k}\, dA\, N_c$$

$$\therefore \quad da\, n_k = J\, dA \frac{\partial X_c}{\partial x_k} N_c$$

$$\therefore \begin{cases} da\, \underset{\sim}{n} = J\, dA\, \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N} & \text{: برای یک المان سطح} \\ ds\, \underset{\sim}{m} = dS\, \underset{\sim}{F}\, \underset{\sim}{M} & \text{: برای یک المان خط} \end{cases}$$

یا بصورت اندیسی:

$$n_i = \frac{1}{(\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N})^{1/2}} X_{A,i}\, N_A$$

یا برعکس برداری که عمود بر سطح مادی در هیئت فعلی $\underset{\sim}{n}$ باشد، در هیئت مرجع هم جهت با بردار $\underset{\sim}{N}' = \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n}$ است زیرا بردار قائم که عمود بر سطح مادی مربوطه در هیئت مرجع برابر با:

$$\underset{\sim}{N} = \frac{\underset{\sim}{N}'}{\|\underset{\sim}{N}'\|} = \frac{\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n}}{(\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n})^{1/2}} = \frac{\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n}}{(\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{n})^{1/2}}$$

است.

$$da\,\underset{\sim}{n} = J\,dA\,\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N} \longrightarrow da\,\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n} = J\,dA\,\underset{\sim}{N}$$

$$\frac{da}{dA}\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n} = J\,\underset{\sim}{N} \longrightarrow \left(\frac{da}{dA}\right)^2 \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{n} = J^2$$

$$\therefore \left(\frac{da}{dA}\right)^2 = \frac{J^2}{(\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{n})} \Rightarrow \left(\frac{da}{dA}\right) = \frac{J}{(\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{n})^{1/2}}$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{J}{(\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{n})^{1/2}} = J\,(\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N})^{1/2}$$

$$\therefore (\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{n})\cdot(\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N}) = 1$$

$$\text{or} \quad \underset{\sim}{n}^T\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{n}\;\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N} = 1$$

$$da\,\underset{\sim}{n} = J\,dA\,\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N} \longrightarrow \frac{da}{dA}\,\underset{\sim}{n} = J\,\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}$$

$$\left(\frac{da}{dA}\right)^2 = J^2\,(\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}) = J^2\,(\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N})$$

$$= J^2\,\underset{\sim}{N}\cdot(\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F})^{-1}\underset{\sim}{N} = J^2\,\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N}$$

$$\therefore da/dA = J\,(\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N})^{1/2}$$

با جایگذاری داریم:

$$J\sqrt{\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N}}\;\underset{\sim}{n} = J\,\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}$$

$$\therefore \underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}}{\sqrt{\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N}}}$$

همانطور که جهت یک بردار یا خط مادی در هیئت مرجع $\underset{\sim}{M}$ باشد در این صورت در هیئت فعلی جهت این خط مادی، هم جهت با $\underset{\sim}{m}' = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{M}$ خواهد بود. در مورد یک سطح مادی می‌توان گفت: سطح مادی با بردار قائم $\underset{\sim}{N}$ در هیئت مرجع، در هیئت فعلی هم جهت با بردار $\underset{\sim}{n}' = \underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}$ است لذا

$$\underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{n}'}{\|\underset{\sim}{n}'\|} = \frac{\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}}{(\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N})^{1/2}}$$

$$\therefore \underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{N}}{(\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{C}^{-1}\underset{\sim}{N})^{1/2}}$$

$$\underset{\sim}{dA} = \underset{\sim}{dX} \times \underset{\sim}{dY} \quad ; \quad \underset{\sim}{da} = \underset{\sim}{dx} \times \underset{\sim}{dy}$$

$$dX_A = X_{A,i}\, dx_i \quad \text{or} \quad dX^{(1)}_A = X_{A,i}\, dx^{(1)}_i$$

$$dY_B = X_{B,j}\, dy_j \quad \text{or} \quad dX^{(2)}_B = X_{B,j}\, dx^{(2)}_j$$

$$\underset{\sim}{dA} = dA\,\underset{\sim}{N} = dX_A\, \underset{\sim}{e}_A \times dY_B\, \underset{\sim}{e}_B$$

$$= \varepsilon_{ABC}\, dX_A\, dY_B\, \underset{\sim}{e}_C$$

$$= \varepsilon_{ABC}\, X_{A,i}\, X_{B,j}\, dx_i\, dy_j\, \underset{\sim}{e}_C \qquad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\varepsilon_{ijk} \det\left(\frac{\partial X_A}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ABC}\, X_{A,i}\, X_{B,j}\, X_{C,k}$$

$$\frac{1}{J}\, \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_k}{\partial X_M} = \varepsilon_{ABM}\, X_{A,i}\, X_{B,j}$$

حال با جایگذاری در رابطه‌ی (*) داریم:

$$dA\,\underset{\sim}{N} = \frac{1}{J}\, \varepsilon_{ijk}\, dx_i\, dy_j\, F_{kM}\, \underset{\sim}{e}_M$$

$$= dA\, N_M\, \underset{\sim}{e}_M$$

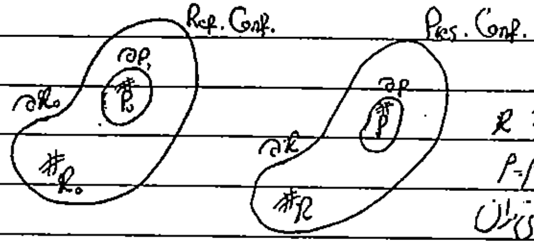
$$\therefore \quad dA\, N_M = \frac{1}{J}\, da\, n_k\, F_{kM}$$

$$\therefore \quad dA\,\underset{\sim}{N} = \frac{1}{J}\, da\, F^T \underset{\sim}{n}$$

$$J\left(\frac{dA}{da}\right) \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n} \qquad J\left(\frac{dA}{da}\right) = (\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{B}\, \underset{\sim}{n})^{1/2}$$

Conservation of Mass.

اصل بقای جرم.



اگر ρ را دانسیته جرمی بدنه $\mathcal{R}$ بنامیم، در توصیف اویلری $\rho = \rho(\underset{\sim}{x}, t)$ خواهد بود. پس جرم کل بدنه برای زمان t به صورت زیر بدست می‌آید:

$$m(P) = \int_P \rho\, dv$$

اصل بقای جرم حاکی از آن است که در یک فرآیند فیزیکی جرم ثابت باقی می‌ماند؛ لذا داریم:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt}\int_P \rho\, dv = 0$$

به طوری که P یک جزء مادی دلخواه از بدنه $\mathcal{R}$ است.

Reynolds Transport Theorem.

قضیه انتقال رینولدز.

اگر φ یک ویژگی از ویژگی‌های یک جزء پیوسته باشد در توصیف اویلری $\varphi = \tilde{\varphi}(\underset{\sim}{x}, t)$ و بیان لاگرانژی $\varphi = \hat{\varphi}(\underset{\sim}{X}, t)$ در توصیف لاگرانژی داریم:

$$\mathcal{L}: \ \varphi = \tilde{\varphi}(\underset{\sim}{x}, t) = \hat{\varphi}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_P \varphi\, dv = \int_P (\dot{\varphi} + \varphi\, \mathrm{div}\, \underset{\sim}{v})\, dv$$

قضیه فوق را می‌توان به صورت زیر اثبات کرد

$$\frac{d}{dt}\int_{P}\varphi\,dv = \frac{d}{dt}\int_{P}\varphi(\underset{\sim}{x},t)\,dv = \frac{d}{dt}\int_{P_0}\hat{\varphi}(\underset{\sim}{X},t)\,J\,dV$$

$$= \int_{P_0}\frac{d}{dt}\left(J\,\hat{\varphi}(\underset{\sim}{X},t)\right)dV$$

$$= \int_{P_0}\left(\dot{\hat{\varphi}}\,J + \hat{\varphi}\,\dot{J}\right)dV \qquad (*)$$

از طرفی $\dot{J}$ برابر $J \operatorname{div} \underset{\sim}{v}$

$$\varepsilon_{ABC}\,J = \varepsilon_{ijk}\,x_{i,A}\,x_{j,B}\,x_{k,C} = \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{jB}\,F_{kC}$$

$$\varepsilon_{ABC}\,\dot{J} = \varepsilon_{ijk}\,\dot{F}_{iA}\,F_{jB}\,F_{kC} + \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,\dot{F}_{jB}\,F_{kC} + \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{jB}\,\dot{F}_{kC}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,L_{im}\,F_{mA}\,F_{jB}\,F_{kC} + \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,L_{jm}\,F_{mB}\,F_{kC} + \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{jB}\,L_{km}\,F_{mC}$$

$$= L_{in}\,F_{mA}\left(\varepsilon_{ijk}\,F_{jB}\,F_{kC}\right) + L_{jm}\,F_{mB}\left(\varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{kC}\right) + L_{km}\,F_{mC}\left(\varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{jB}\right)$$

$$\varepsilon_{ABC}\,J = \varepsilon_{ijk}\,x_{i,A}\,x_{j,B}\,x_{k,C}$$ از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ABC}\,J\,X_{A,i} = \varepsilon_{ijk}\,F_{jB}\,F_{kC} \\ \varepsilon_{ABC}\,J\,X_{B,j} = \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{kC} \\ \varepsilon_{AB}\,J\,X_{C,k} = \varepsilon_{ijk}\,F_{iA}\,F_{jB} \end{cases}$$

با جایگذاری داریم:

$$\varepsilon_{ABC}\,\dot{J} = L_{im}\,F_{mA}\,\varepsilon_{\bar{A}BC}\,J\,X_{\bar{A},i} + L_{jm}\,F_{mB}\,\varepsilon_{A\bar{B}C}\,J\,X_{\bar{B},j} + L_{km}\,F_{mC}\,\varepsilon_{AB\bar{C}}\,J\,X_{\bar{C},k}$$

$$\varepsilon_{ABC}\,\varepsilon_{ABC}\,\dot{J} = L_{im}\,F_{mA}\,X_{\bar{A},i}\;\varepsilon_{\bar{A}BC}\,J\,\varepsilon_{ABC} \rightarrow 2L_{im}\,X_{\bar{A},i}\,J\,\delta_{\bar{A}A}\,F_{mA} +$$

$$+ L_{jm}\,F_{mB}\,X_{\bar{B},j}\;\varepsilon_{A\bar{B}C}\,J\,\varepsilon_{ABC} \rightarrow 2L_{jm}\,X_{\bar{B},j}\,J\,\delta_{\bar{B}B}\,F_{mB} +$$

$$+ L_{km}\,F_{mC}\,X_{\bar{C},k}\;\varepsilon_{AB\bar{C}}\,J\,\varepsilon_{ABC} \rightarrow 2L_{km}\,X_{\bar{C},k}\,J\,\delta_{\bar{C}C}\,F_{mC}$$

$$= 2L_{im}\,X_{A,i}\,J\,F_{mA} + 2L_{jm}\,X_{B,j}\,J\,F_{mB} + 2L_{km}\,X_{C,k}\,J\,F_{mC}$$

$$\therefore\; 6\dot{J} = 6L_{im}\,X_{A,i}\,J\,F_{mA}$$

$$\therefore\; \dot{J} = J\,L_{im}\,\frac{\partial x_m}{\partial X_A}\,\frac{\partial X_A}{\partial x_i} = J\,L_{im}\,\delta_{mi} = J\,L_{ii}$$

$$\therefore\; \dot{J} = J\,L_{ii} = J\operatorname{div}\underset{\sim}{v} = J\,D_{ii} = J\operatorname{div}\underline{D}$$

حال با جایگذاری در رابطه (*) داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{P}\varphi\,dv = \int_{P_0}\left(\dot{\hat{\varphi}}\,J + \hat{\varphi}\,\dot{J}\right)dV$$

$$= \int_{P_0}\left(\dot{\hat{\varphi}}\,J + \hat{\varphi}\,J\operatorname{div}\underset{\sim}{v}\right)dV$$

$$= \int_{P_0}\left(\dot{\hat{\varphi}} + \hat{\varphi}\operatorname{div}\underset{\sim}{v}\right)J\,dV$$

$$= \int_{P}\left(\dot{\hat{\varphi}} + \hat{\varphi}\operatorname{div}\underset{\sim}{v}\right)dv$$

با استفاده از قضیهٔ انتقال رینولدز، اصل بقای جرم را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dt}\int_P \rho\, dv = \int_P (\dot{\rho} + \rho\, div\, \underline{v})\, dv = 0$$

با توجه به دلخواه بودن P از بدنهٔ $\mathcal{R}$ داریم:

$$\dot{\rho} + \rho\, div\, \underline{v} = 0$$

رابطهٔ فوق در واقع نمایش موضعی اصل بقای جرم است که معادله پیوستگی نامیده می‌شود.

$$\dot{\rho} + \rho\, div\, \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,i} v_i + \rho v_{i,i} = 0$$

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad or \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \underline{v}) = 0$$

به عنوان مثال در مورد یک مادهٔ تراکم ناپذیر داریم: $\dot{\rho} = 0$ ، همچنین در مورد یک مادهٔ همگن داریم: $\rho_{,i} = 0$ و در مورد یک جریان یکنواخت Steady State داریم: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\int_{P_0} \rho_0(\underline{X})\, dV = \int_P \rho(\underline{x}, t)\, dv = \int_{P_0} \rho J\, dV$$

با توجه به دلخواه بودن P_0 از بدنهٔ $\mathcal{R}_0$ داریم:

$$\rho_0 = \rho J$$

که با مشتق گیری از طرفین رابطهٔ فوق به معادله پیوستگی می‌رسیم:

$$\dot{\overline{\rho J}} = \dot{\rho}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\rho} J + \rho \dot{J} = \dot{\rho} J + \rho J\, div\, \underline{v} = 0$$

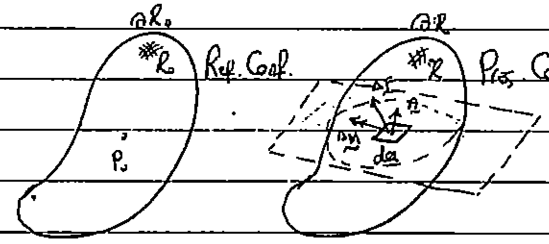
$$\therefore \dot{\rho} + \rho\, div\, \underline{v} = 0$$

« آنالیز تنش »

1) Body Force

2) Contact Force , Surface Force.

بدنهٔ $\mathcal{R}$ را در یک حرکت تغییر فرم در هیئت فعلی در نظر بگیرید:



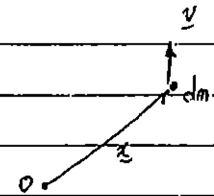
$$\underline{t}(\underline{x}, t; \underline{n}) \triangleq \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta a} = dF/da$$

اصل تنش کوشی $\lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta a} = 0$

محیطی که اصل تنش کوشی برای آن برقرار باشد، غیرقطبی (Noopalar) نامیده می‌شود.
اگر $\underline{b} = \underline{b}(\underline{x}, t)$ را شدت نیروی جسم بر واحد جرم بنامیم.

$$\underline{f}_b(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \underline{b}\, dm = \int_{\mathcal{R}} \rho \underline{b}\, dv \qquad \text{Body Force}$$

$$\underline{f}_c(\mathcal{R}) = \int_{\partial\mathcal{R}} \underline{t}(\underline{x}, t; \underline{n})\, da = \int_{\partial\mathcal{R}} \underline{t}(\underline{n})\, da \qquad \text{Contact Force}$$



برآیند نیروهای وارد بر جزء $\mathcal{R}$: $\underline{f}(\mathcal{R}) = \underline{f}_b(\mathcal{R}) + \underline{f}_c(\mathcal{R})$

ممنتوم خطی جزء $\mathcal{R}$: $\int_{\mathcal{R}} \underline{v}\, dm = \int_{\mathcal{R}} \rho \underline{v}\, dv$

ممنتوم زاویه‌ای جزء $\mathcal{R}$: $\int_{\mathcal{R}} \underline{x} \times \underline{v}\, dm = \int_{\mathcal{R}} \underline{x} \times \rho \underline{v}\, dv$

ممنتوم زاویه‌ای حول $\underline{x}_0$: $\int_{\mathcal{R}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{v}\, dm = \int_{\mathcal{R}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \rho \underline{v}\, dv$

اصل تعادل ممنتم زاویه‌ای در نظر بگیرید (بیان از طریق تانسور در مبنای برای ... برقرار شد)

$$\underset{\sim}{f}(R) = \underset{\sim}{f}_b(R) + \underset{\sim}{f}_c(R) = \frac{d}{dt}\int_R \rho \underset{\sim}{v}\, dv$$

$$\underset{\sim}{l}(R) = \underset{\sim}{l}_b(R) + \underset{\sim}{l}_c(R) = \frac{d}{dt}\int_R \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}\, dv$$

بشرطی که

$$\underset{\sim}{l}_b(R) = \int_R \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{b}\, dm = \int_R \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{b}\, dv$$

$$\underset{\sim}{l}_c(R) = \int_{\partial R} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\, da = \int_{\partial R} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{x}, t, \underset{\sim}{n})\, da$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho \underset{\sim}{v}\, dv = \int_R \left(\overline{\rho \underset{\sim}{v}} + \rho \underset{\sim}{v}\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\right) dv$$

$$= \int_R \left(\rho \dot{\underset{\sim}{v}} + \dot{\rho} \underset{\sim}{v} + \rho \underset{\sim}{v}\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\right) dv$$

$$= \int_R \left[\rho \dot{\underset{\sim}{v}} + \cancel{(\dot{\rho} + \rho\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v})\, \underset{\sim}{v}}\right] dv = \int_R \rho\, \underset{\sim}{a}\, da$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}\, dv = \int_R \left[\overline{\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}} + (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v})\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\right] dv$$

$$= \int_R \left[\underset{\sim}{x} \times \dot{\rho} \underset{\sim}{v} + \dot{\underset{\sim}{x}} \times \rho \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{x} \times \rho \dot{\underset{\sim}{v}} + (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v})\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\right] dv$$

$$= \int_R \underset{\sim}{x} \times \rho \dot{\underset{\sim}{v}}\, dv = \int_R \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{a}\, dm$$

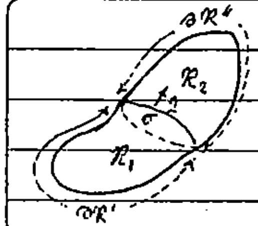
یادآوری می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}\int_R \psi\, dm = \frac{d}{dt}\int_R \rho \psi\, dv = \int_R \left(\dot{\overline{\rho\psi}} + \rho\psi\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\right) dv$$

$$= \int_R \left[\rho \dot{\psi} + \psi(\dot{\rho} + \rho\, \operatorname{div} \underset{\sim}{v})\right] dv = \int_R \dot{\psi}\, dm$$

Properties of Traction Vector & ~~Existence of~~

ویژگی‌های بردار تنش (بردار تراکشن)
و اثبات وجود تانسور تنش



$$R = R_1 \cup R_2$$

$$\partial R_1 = \partial R' \cup \sigma$$

$$\partial R = \partial R' \cup \partial R'' \qquad \sigma = \partial R_1 \cap \partial R_2$$

$$\text{for } R_1 : \int_{R_1} (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})\, dm = \int_{\partial R'} \underset{\sim}{t}\, da + \int_\sigma \underset{\sim}{t}\, da \qquad (*)$$

$$\text{for } R_2 : \int_{R_2} (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})\, dm = \int_{\partial R_2} \underset{\sim}{t}\, da + \int_\sigma \underset{\sim}{t}(-\underset{\sim}{n})\, da \qquad (**)$$

$$\text{for } R : \int_{R_1 \cup R_2} (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b})\, dm = \int_{\partial R' \cup \partial R''} \underset{\sim}{t}\, da \qquad (***)$$

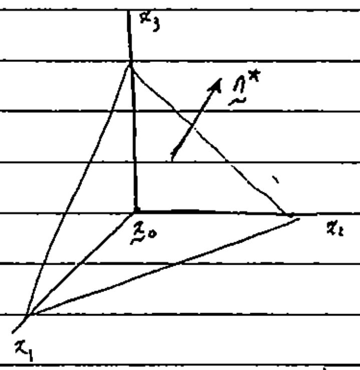
از سه رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$(*) + (**) - (***) \Rightarrow \int_\sigma [\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) + \underset{\sim}{t}(-\underset{\sim}{n})]\, da = 0$$

با توجه به دلخواه بودن σ و پیوسته بودن تابع داخل انتگرال نتیجه می‌گیریم

در واقع همان قانون سوم نیوتن است:

$$\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n}) = -\underset{\sim}{t}(-\underset{\sim}{n})$$



حال هرم مقابل را در نظر بگیرید در نقطه x_0
با بردارهای یکه عمود بر وجوه ۳ گانه آن
و $\underset{\sim}{n}^*$ عمود بر وجه چهارم. مساحت وجوه
۳ گانه آن را با f_i دارای مساحت S_i
و وجه چهارم f دارای مساحت S است

$$S_i = S_i(\underset{\sim}{n}^*, \underset{\sim}{e}_i)$$

$$S_i = S n_i^* \qquad \underset{\sim}{n}^* \text{ مؤلفه iام}$$

حال برای این هرم قانون بقا و ممنتم خطی را می نویسیم :

$$\int_T \rho(\underline{a}-\underline{b})\,dv = \int_f \underline{t}(\underline{n}^*)\,da + \sum_{i=1}^{3}\int_{f_i} \underline{t}(\underline{e}_i)\,da$$

$$= \int_f \underline{t}(\underline{n}^*)\,da - \sum_{i=1}^{3}\int_{f_i} \underline{t}(\underline{e}_i)\,da$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم

$$\int_f \underline{t}(\underline{n}^*)\,da = \underline{t}^*(\underline{n}^*)\,S$$

$$\underline{t}(\underline{e}_i) \triangleq \underline{t}_i \quad , \quad \int_{f_i} \underline{t}(\underline{e}_i)\,da = \underline{t}_i^*\,S_i = \underline{t}_i^*\,n_i^*\,S$$

با توجه به کراندار بودن ρ و $\underline{a}$ و $\underline{b}$

$$\therefore \int_T \rho(\underline{a}-\underline{b})\,dv = (\underline{t}^*(\underline{n}^*) - \underline{t}_i^*\,n_i^*)\,S$$

$$\Rightarrow \left|\int_T \rho(\underline{a}-\underline{b})\,dv\right| \leqslant K(1/3\,S\,h) \leftarrow \left|\int_p f\,dv\right| \leqslant \int_p |f|\,dv$$

$$\therefore \left|\underline{t}^*(\underline{n}^*) - \underline{t}_i^*\,n_i^*\right| \leqslant 1/3\,K\,h \qquad (*)$$

حال دنباله ای از هرم ها را در نظر بگیرید $T_1, T_2, \dots$ به ارتفاع $h_1, h_2, \dots$ به طوری که $h_1 > h_2 > \dots$ ، $h \to 0$ را در رابطه $(*)$ اعمال می کنیم در نتیجه

$$\underline{t}(\underline{x}^*, t\,;\,\underline{n}^*) = \underline{t}_i(\underline{x}^*, t)\,n_i^*$$

با توجه به دلخواه بودن $\underline{x}^*$ ، $\underline{n}^*$ داریم

$$\underline{t}(\underline{x}, t\,;\,\underline{n}) = \underline{t}_i(\underline{x}, t)\,n_i$$

پس برای مشخص کردن بردار تراکشن در یک سطح با عمود $\underline{n}$ ، نیاز به ۳ بردار

$\underline{t}_i$ یعنی ۹ مولفه داریم

$$t_{ki} \triangleq \underline{t}_i \cdot \underline{e}_k$$

$$\underline{t}_i = t_{ki}\,\underline{e}_k \qquad t_{ki} = t_{ki}(\underline{x}, t)$$

$$\underline{t}(\underline{n}) = t_k\,\underline{e}_k = t_{ki}\,n_i\,\underline{e}_k \qquad t_k = t_{ki}\,n_i$$

با توجه به استقلال $\underline{e}_i$ داریم :

$$t_k = t_{ki}\,n_i$$

t_{ij} را تانسور تنش کوشی گوییم

$$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{T}\,\underline{n}$$

حال ثابت می کنیم مولفه های t_{ij} تحت تبدیل یک تانسور مرتبه دو تبدیل می شوند

$$\begin{cases} x_i = a_{ij}\,x'_j \\ x'_j = a_{ij}\,x_i \end{cases} ; \quad \begin{cases} \underline{e}_i = a_{ij}\,\underline{e}'_j \\ \underline{e}'_j = a_{ij}\,\underline{e}_i \end{cases} ; \quad a_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_j$$

$$\underline{t} = t_{ki}\,n_i\,\underline{e}_k = t'_{ki}\,n'_i\,\underline{e}'_k = t'_{ki}(a_{ji}\,n_j)(a_{mk}\,\underline{e}_m)$$

$$(t_{mj} - a_{mk}\,a_{ji}\,t'_{ki})\,n_j\,\underline{e}_m = 0$$

با توجه به استقلال $\underline{e}_i$ داریم:

$$(t_{mj} - a_{mk}\,a_{ji}\,t'_{ki})\,n_j = 0$$

با توجه به دلخواه بودن n_j ، استقلال ضرایب داریم:

$$t_{mj} = a_{mk}\,a_{ji}\,t'_{ki}$$

$$\underline{T} = \underline{A}\,\underline{T}'\,\underline{A}^T \quad ; \quad \underline{T}' = \underline{A}^T\,\underline{T}\,\underline{A}$$

* فرم موضعی معادلات تعادل

الف) تعادل ممنتم خطی :

$$\int_R \rho\,\underline{a}\,dv = \int_R \rho\,\underline{b}\,dv + \int_{\partial R} \underline{t}(\underline{n})\,da$$

$$= \int_R \rho\,\underline{b}\,dv + \int_{\partial R} \underline{t}_i\,n_i\,da = \int_R \rho\,\underline{b}\,dv + \int_R \underline{t}_{i,i}\,dv$$

$$\therefore \int_R (\underline{t}_{i,i} + \rho\,\underline{b} - \rho\,\underline{a})\,dv = 0$$

با توجه به اینکه حوزه محیط پیوسته دلخواه است

$$\therefore \operatorname{div}\underline{T} + \rho\,\underline{b} = \rho\,\underline{a}$$

$$\therefore \underline{t}_{i,i} + \rho\,\underline{b} = \rho\,\underline{a} = \rho\,\dot{\underline{v}}$$

اگر طرفین را در $\underline{e}_k$ ضرب کنیم

$$\therefore t_{ki,i} + \rho\,b_k = \rho\,a_k$$

$$\operatorname{div}\underline{T} + \rho\,\underline{b} = \rho\,\underline{a}$$

ب) تعادل ممنتم زاویه‌ای

$$\int_R x\times\rho a\,dv = \int_R x\times\rho b\,dv + \int_{\partial R} x\times t(n)\,da$$

از طرفی داریم:

$$\int_{\partial R} x\times t(n)\,da = \int_{\partial R} x\times t(n)\,da = \int_{\partial R} x\times t_i n_i\,da$$

$$= \int_R (x\times t_i)_{,i}\,dv$$

$$(x\times t_i)_{,i} = x_{,i}\times t_i + x\times t_{i,i} = e_i\times t_i + x\times t_{i,i}$$

با جاگذاری داریم:

$$\int_R x\times(t_{i,i} + \rho b - \rho a)\,dv + \int_R (e_i\times t_i)\,dv = 0$$

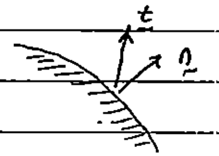
$$\therefore\ e_i\times t_i = 0 \Rightarrow e_i\times t_{ji}\, e_j = \varepsilon_{ijk} t_{ji}\, e_k = 0$$

با توجه به استقلال e_k ها داریم:

$$\varepsilon_{ijk} t_{ji} = 0 \Rightarrow t_{ij} = t_{ji}$$

در نتیجه تانسور تنش کوشی متقارن است $T = T^T$

پس دارای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه حقیقی است که دو به دو بر هم عمودند.



تنش نرمال $\sigma_n = t\cdot n$

تنش برشی $\sigma_s^2 = \|t\|^2 - \sigma_n^2$

معادله مشخصه: $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

I_1, I_2, I_3 را ناورداهای تانسور تنش کوشی گوییم

$I_1 = tr\,T = t_{ii}$

$I_2 = 1/2\left[(tr\,T)^2 - tr\,T^2\right] = 1/2\left[t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij}\right]$

$I_3 = \det T$

تانسور تنش کروی و تانسور تنش انحرافی

$$T = S + \sigma I$$

$$tr\,S = 0 \Rightarrow tr\,T = 3\sigma \rightarrow \sigma = 1/3\, t_{ii}$$

S را تانسور تنش انحرافی یا "Deviatoric" و σI را تانسور تنش کروی گوییم.

$$t_{ij} = S_{ij} + 1/3\, t_{kk}\delta_{ij} \quad \& \quad S_{ij} = t_{ij} - 1/3\, t_{kk}\delta_{ij}$$

S باعث تغییر شکل و σI باعث تغییر حجم می‌گردد.

مثال ۱: ثابت کنید اگر تانسور تنش کوشی در یک نقطه از محیط پیوسته به صورت $T = -pI$ باشد، در این صورت تنش برشی بر روی هر صفحه در این نقطه صفر است.

$$t = Tn = -pn \Rightarrow \sigma_s = 0\ ,\ \sigma_n = -p$$

مثال ۲. در یک نقطه از یک محیط پیوسته تانسور تنش کوشی در دستگاه دکارتی e_i دارای ماتریس به صورت مقابل است. الف) بردار تراکشن را و تنش‌های نرمال و تنش‌های برشی را در این نقطه روی صفحه‌ای که به موازات صفحه $x_1+2x_2+2x_3=6$ است بدست آورید.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} MPa$$

$$n = 1/3\langle 1\quad 2\quad 2\rangle^T$$

$$t = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = Tn = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix} = 1/3\begin{Bmatrix} 16 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$t = 16/3\, e_1 + e_2 + 2/3\, e_3$$

$$\sigma_n = t\cdot n = 1/9(16+6+4) = 26/9$$

$$\sigma_s^2 = \|t\|^2 - \sigma_n^2 = 1/9(256+9+4) - (26/9)^2 \Rightarrow \sigma_s = \frac{\sqrt{1745}}{9}$$

ب) اگر در این نقطه دستگاه $\underline{x}'$ را با بردارهای یکه $\underline{e}'_1 = 1/3\,(2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3)$

متعامد تعریف کنیم، در این صورت $\underline{e}'_2 = 1/\sqrt{2}\,(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ در این دستگاه T'_{13} را حساب کنید.

$\underline{e}'_3 = \underline{e}'_1 \times \underline{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2 - 4\underline{e}_3)$

$T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{T}\,\underline{e}_j \qquad T'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{T}\,\underline{e}'_j$

$$T'_{13} = 1/3\,(2, 2, 1)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} 1/3\sqrt{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{Bmatrix} = -\frac{8}{9\sqrt{2}}\ \mathrm{MPa}$$

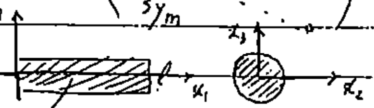
مثال ۳. رابطه زیر را ثابت کنید به طوری که $\underline{T}$ تانسور تنش در دستگاه $\underline{x}$، $\underline{T}'$ تانسور تنش در دستگاه $\underline{x}'$ است.

$$t'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{T}\,\underline{e}'_j = \underline{e}'_i \cdot \underline{T}'\underline{e}'_j$$

$$= a_{mi}\,\underline{e}_m\,\underline{T}\,a_{nj}\,\underline{e}_m = a_{mi}\,a_{nj}\,\underline{e}_m\,\underline{T}\,\underline{e}_n = a_{mi}\,a_{nj}\,t_{mn}$$

مثال ۴. تانسور تنش نقطه‌ای در دستگاه دکارتی $\underline{x}$ دارای نمایش ماتریسی به صورت مقابل است.

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & +\alpha x_2 \\ & 0 & 0 \\ sym & & 0 \end{pmatrix}$$



الف) بردار تراکشن را بر سطح جانبی $(x_2)^2 + (x_3)^2 = 4$ شافت را محاسبه کنید.

ب) برآیند نیروهای وارد بر سطح $x_1 = l$، همچنین گشتاور این نیروها را حول محور مرکزی محاسبه کنید.

$$\underline{n} = \nabla F / \|\nabla F\| \quad ; F = x_2^2 + x_3^2 - 4 \quad \Rightarrow \underline{n} = 1/2\langle 0, x_2, x_3 \rangle$$

$$\underline{t} = \underline{T}\,\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & +\alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ +\alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

به بیان دیگر سطح جانبی شافت خالی از تنش است.

در سطح $x_1 = l$، $\underline{n} = \underline{e}_1$ داریم:

$$\underline{t} = \underline{T}\,\underline{n} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & +\alpha x_2 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -\alpha x_3\,\underline{e}_2 + \alpha x_2\,\underline{e}_3$$

$$\underline{f} = \int_s \underline{t}\,da = \int_0^{2\pi}\int_0^{r=2} (-\alpha r \sin\theta\,\underline{e}_2 + \alpha r \cos\theta\,\underline{e}_3)\, r\,dr\,d\theta = 0$$

$$\underline{M}_o = \int_s \underline{x} \times \underline{t}\,da = \int_s (l\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) \times (-\alpha x_3\underline{e}_2 + \alpha x_2\underline{e}_3)\,da$$

$$= \int_s \alpha\,\underline{e}_1\,(x_2^2 + x_3^2)\,da = \alpha\,\underline{e}_1 \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^3\,dr\,d\theta = 8\pi\alpha\,\underline{e}_1$$

روش دوم:

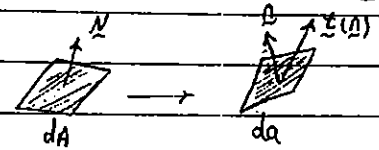
$$\underline{f} = \int_s \underline{t}\,da = -\alpha\,\underline{e}_2 \int_s x_3\,da + \alpha\,\underline{e}_3 \int_s x_2\,da$$

$$= (\bar{x}_3 A)(-\alpha\underline{e}_2) + (\bar{x}_2 A)(\alpha\underline{e}_3) = 0$$

اگر J ممان اینرسی قطبی سطح باشد، داریم:

$$\underline{M}_o = \alpha \int_s (x_2^2 + x_3^2)\,da = \alpha J$$

تانسور تنش پیولا و فرم دیگر معادلات حرکت



$d\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{t}\, da \qquad \underset{\sim}{t} = d\underset{\sim}{f}/da = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}$

$\underset{\sim}{T}$: Cauchy Stress Tensor

$d\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{t}\, da = \underset{\sim}{P}\, dA$ — $\underset{\sim}{P}$ را تانسور تنش پیولا نوع اول گوییم و تعریف می‌کنیم:

$\underset{\sim}{P}$: Piola - Kirchhoff's Stress Tensor (First. Piola)

تعادل ممنتوم خطی:

$$\int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{a}\, dv = \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t}\, da$$

$$\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underset{\sim}{a}\, dV = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underset{\sim}{b}\, dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{P}\, dA \qquad \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{X}, t; \underset{\sim}{N})$$

$\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{N}) = -\underset{\sim}{P}(-\underset{\sim}{N})$

$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}_M N_M \rightarrow \underset{\sim}{P}_M = P_{iM}\, \underset{\sim}{e}_i$

$P_{iM} \triangleq \underset{\sim}{P}_M \cdot \underset{\sim}{e}_i \longrightarrow \underset{\sim}{P} = P_{iM} N_M \underset{\sim}{e}_i \; ; \; \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{N} \; ; \; P_{iM} \neq P_{Mi}$

بردار $\underset{\sim}{P}_M$ عبارت است از نیرو بر المان سطحی که عمود بر سطح آن در هیئت مرجع $\underset{\sim}{e}_M$ بوده.

تعادل ممنتوم زاویه‌ای:

$$\int_{\mathcal{R}} \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{a}\, dv = \int_{\mathcal{R}} \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}\, da$$

$$\int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times \rho_0 \underset{\sim}{a}\, dV = \int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times \rho_0 \underset{\sim}{b}\, dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}\, dA$$

از طرفی داریم،

$$\int_{\partial\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}\, dA = \int_{\partial\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}_M N_M\, dA = \int_{\mathcal{R}} (\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}_M)_{,M}\, dV$$

$$(\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}_M)_{,M} = \underset{\sim}{x}_{,M} \times \underset{\sim}{P}_M + \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{P}_{M,M}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x} \times (\rho_0 \underset{\sim}{a} - \rho_0 \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{P}_{M,M})\, dV + \int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x}_{,M} \times \underset{\sim}{P}_M\, dV = 0$$

از طرفی از تعادل ممنتوم خطی داریم:

$$\therefore \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underset{\sim}{a}\, dV = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underset{\sim}{b}\, dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{P}_M N_M\, dA$$

$$= \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0 \underset{\sim}{b}\, dV + \int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{P}_{M,M}\, dV$$

$\therefore \rho_0 \underset{\sim}{a} = \rho_0 \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{P}_{M,M}$

$P_{iM,M} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$

$t_{ij,j} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$

لذا فقط تعادل ممنتوم زاویه‌ای به عبارت زیر در می‌آید

$$\int_{\mathcal{R}_0} \underset{\sim}{x}_{,M} \times \underset{\sim}{P}_M\, dV = 0$$

که با توجه به دلخواه بودن $\mathcal{R}_0$ داریم:

$\underset{\sim}{x}_{,M} \times \underset{\sim}{P}_M = 0$

$(x_i \underset{\sim}{e}_i)_{,M} \times (P_{jM} \underset{\sim}{e}_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{i,M} P_{jM}\, \underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_{ijk}\, x_{i,M} P_{jM}\, \underset{\sim}{e}_k = 0$

با توجه به استقلال $\underset{\sim}{e}_k$ داریم:

$\therefore \varepsilon_{ijk}\, x_{i,M} P_{jM} = 0$

$\therefore x_{i,M} P_{jM} = x_{j,M} P_{iM} \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{P}^T = \underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{F}^T \; , \; \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$

حال رابطه بین تانسور تنش کوشی و پیولا را بدست می‌آوریم:

$d\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{t}\, da = \underset{\sim}{P}\, dA \qquad \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n}\, da = \underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{N}\, dA$

از طرفی داریم،

$\underset{\sim}{n}\, da = J\, \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}\, dA$

$$J\underline{T}\,\underline{F}^{-T}\underline{N} = \underline{P}\,\underline{N} \Rightarrow J\underline{T}\,\underline{F}^{-T} = \underline{P}$$

$$\begin{cases} J\underline{T} = \underline{P}\,\underline{F}^{T} = \underline{F}\,\underline{P}^{T}, \quad J = \det \underline{F} \\ J t_{ij} = x_{i,M} P_{jM} = x_{j,M} P_{iM} \end{cases}$$

تانسور تنش پیولای نوع دوم (تبدیلات قبلی) (Second Piola Krichhoff S.T.)

$$\underline{P} = \underline{F}\,\underline{S} \quad \text{or} \quad \underline{S} \triangleq \underline{F}^{-1}\underline{P}$$

$$P_{iB} = x_{i,A} S_{AB} \qquad \underline{F}\,\underline{P}^{T} = \underline{P}\,\underline{F}^{T} \rightarrow \underline{F}(\underline{F}\,\underline{S})^{T} = \underline{F}\,\underline{S}\,\underline{F}^{T}$$

$$\underline{F}\,\underline{S}^{T}\underline{F}^{T} = \underline{F}\,\underline{S}\,\underline{F}^{T} \Rightarrow \underline{S} = \underline{S}^{T} \quad \text{or} \quad S_{AB} = S_{BA}$$

$$d\underline{f} = \underline{t}\,da = \underline{P}\,dA \quad s.t: \ \underline{t} = \underline{T}\,\underline{n} \ \& \ \underline{P} = \underline{P}\,\underline{N}$$

شبه نیرو Pseudo Force $\quad d\tilde{\underline{f}} = \underline{S}\,d\underline{A} = \underline{S}\,\underline{N}\,dA$

$$d\underline{f} = \underline{F}\,d\tilde{\underline{f}} = \underline{F}\,\underline{S}\,\underline{N}\,dA = \underline{P}\,\underline{N}\,dA = \underline{P}\,d\underline{A}$$

$$\begin{cases} \underline{t} = \underline{T}\,\underline{n} \\ d\underline{f} = \underline{t}\,da \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{P} = \underline{P}\,\underline{N} \\ d\underline{f} = \underline{P}\,dA \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{S} = \underline{S}\,\underline{N} \\ d\tilde{\underline{f}} = \underline{S}\,dA \end{cases}$$

$$\therefore \ d\underline{f} = \underline{F}\,d\tilde{\underline{f}}$$

«معادلات میدان»

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \qquad \rho J = \rho_0$$

$$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i \quad \text{or} \quad P_{iA,A} + \rho_0 b_i = \rho_0 a_i$$

$$t_{ij} = t_{ji} \quad \text{or} \quad x_{i,M} P_{jM} = x_{j,M} P_{iM}$$

همانطور که مشاهده می‌شود معادلات میدان در خصوص حل مسائل کامل نیستند و در خصوص نوع ماده تعیینی ندارند، معادلات میدان نیاز به معادلات متشکله داریم.

تئوری کلی معادلات متشکله (معادلات ساختاری) (Constitutive Equations)

برای معادلات متشکله نیاز به انجام آزمایش دارد و در واقع ابتدای مورد تقریب در مورد حل مسائل محیط پیوسته است. علی رغم کار آزمایشگاهی، معادلات ساختاری دارای یک سری ویژگی است به بیان دیگر نباید اصل مکانیکی در یایی را نقض کند. این ویژگی‌ها عبارتند از:

۱. این معادلات نباید معادلات میدان را نقض کنند.

۲. دستگاه‌های مختصات بایستی برای این معادلات علی‌السویه باشند به عبارت دیگر این معادلات بایستی بیان تانسوری داشته باشند.

۳. تقارن‌های مادی موجود در مواد بایستی خودشان را در این معادلات نشان دهند.

۴. معادلات بایستی به طور معقولی تنظیم شوند به قسمی که وقتی به معادلات نیاز است اطلاعات لازم جهت تعیین مجهولات بدست دهند.

۵. ناپیوستگی‌هایی که در این معادلات معرفی می‌شوند باید به گونه‌ای باشند که توازن بعدی رعایت شود.

۶. معادلات متشکله بایستی تحت حرکت صلب المانی نامتغیر باشند به بیان دیگر باید اصل عدم تفاوت مادی رعایت شود. (Material Frame Indifference.)

تبدیل تانسور تنش

$\underset{\sim}{t}^+ = \underset{\sim}{T}^+ \underset{\sim}{n}^+ \quad \therefore \quad t_i^+ = t_{ij}^+ n_j^+ = Q_{im} t_m$

$t_{ij}^+ Q_{jk} n_k = Q_{im} t_{mp} n_p \Rightarrow (t_{ij}^+ Q_{jk} - Q_{im} t_{mk}) n_k = 0$

با توجه به دلخواه بودن $\underset{\sim}{n}$ و استقلال ضریب از $\underset{\sim}{n}$ داریم:

$t_{ij}^+ Q_{jk} - Q_{im} t_{mk} = 0 \Rightarrow t_{ij}^+ Q_{jk} = Q_{im} t_{mk}$

طرفین عبارت فوق را در Q_{pk} ضرب می‌کنیم

$Q_{pk} Q_{jk} t_{ij}^+ = Q_{pk} Q_{im} t_{mk} \Rightarrow t_{ip}^+ = Q_{im} Q_{pk} t_{mk}$

$\therefore \underset{\sim}{T}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T$

فرض دوم: $\|\underset{\sim}{t}^+\| = \|\underset{\sim}{t}\| \rightarrow \theta^+ = \theta \quad ; \quad \underset{\sim}{t}^+ \cdot \underset{\sim}{n}^+ = \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{n}$

$t_i^+ n_i^+ = t_j n_j \Rightarrow t_i^+ Q_{ij} n_j = t_i n_i \Rightarrow (t_i^+ Q_{ij} - t_j) n_j = 0$

توجه کنید که در اینجا دیگر ضریب مستقل از $\underset{\sim}{n}$ نیست یعنی به $\underset{\sim}{n}$ وابسته است. با توجه به وابستگی $\underset{\sim}{t}$ به $\underset{\sim}{n}$ نمی‌توان صفر بودن ضریب را نتیجه گرفت، لذا داریم:

$\left.\begin{array}{l} t_i^+ = t_{im}^+ n_m^+ \\ t_j = t_{jk} n_k \end{array}\right\} \Rightarrow (t_{jm}^+ n_m^+ n_j^+ - t_{jk} n_k n_j) = 0$

$n_m^+ = Q_{mk} n_k \qquad (t_{jm}^+ Q_{mk} Q_{ji} n_k n_i - t_{jk} n_k n_j) = 0$

$\therefore (t_{im}^+ Q_{mk} Q_{ij} - t_{jk}) n_k n_j = 0$

با توجه به الف) دلخواه بودن $\underset{\sim}{n}$، ب) استقلال ضریب نسبت به $\underset{\sim}{n}$ چراکه تانسور t_{ij} فقط به $\underset{\sim}{x}$ و t بستگی دارد، ج) متقارن بودن ضریب نسبت به اندیس‌ها داریم:

$t_{im}^+ Q_{ij} Q_{mk} \overset{?}{=} t_{im}^+ Q_{ik} Q_{mj} = t_{mi}^+ Q_{ik} Q_{mj} = t_{im} Q_{ij} Q_{mk}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{T}^+ \underset{\sim}{Q} \Rightarrow \underset{\sim}{T}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T$

$\underset{\sim}{t}^+ = \underset{\sim}{T}^+ \underset{\sim}{n}^+ \rightarrow t_i^+ = t_{ij}^+ n_j^+ \rightarrow t_{ij}^+ = Q_{im} Q_{jn} t_{mn}$

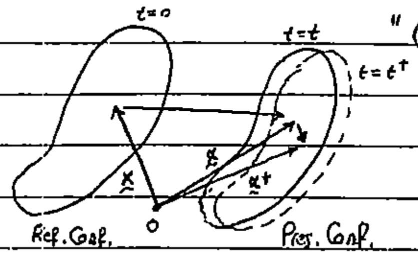
$t_i^+ = Q_{im} Q_{jn} t_{mn} (Q_{jp} n_p) \Rightarrow t_i^+ = Q_{im} t_{mn} n_n$

$t_i^+ = Q_{im} t_m \rightarrow \underset{\sim}{t}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{t}$

« حرکت صلب الحاقی »

پارامترها:

$\left\{\begin{array}{l} \underset{\sim}{F}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{C}^+ = \underset{\sim}{C} \\ J^+ = J \\ \underset{\sim}{B}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{Q}^T \end{array}\right.$



$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{D}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^T \quad ; \quad \underset{\sim}{W}^+ = \underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{Q}^T \quad (\underset{\sim}{\Omega} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T) \; ; \; \underset{\sim}{L}^+ = \underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^T$

$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}$

$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}\,\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{x} + \dot{\underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{a}) + \dot{\underset{\sim}{a}}$

$\rho_0 = \rho J = \rho^+ J^+ \Rightarrow \rho^+ = \rho$

$dv = J\, dV \quad ; \quad dv^+ = J^+ dV \Rightarrow dv^+ = dv$

تبدیل المان سطح و بردار عمود بر آن و بردار تنش کشش:

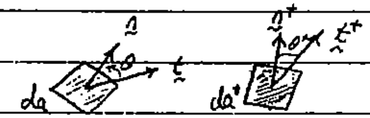
$da\,\underset{\sim}{n} = J\,\underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}\, dA \quad or \quad da_i = J X_{M,i} N_M\, dA$

$da_i^+ = da^+ n_i^+ = J^+ \frac{\partial X_M}{\partial x_i^+} N_M\, dA = J X_{M,j} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^+} N_M\, dA$

$= Q_{ij} J X_{M,j} N_M\, dA = Q_{ij}\, da_j = Q_{ij} n_j\, da$

$(da^+)^2 = (Q_{kj} n_j)(Q_{km} n_m)(da)^2 = (da)^2 \quad \therefore da^+ = da$

$\underset{\sim}{n}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{n}$



فرض: $\underset{\sim}{t}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{t} \rightarrow \|\underset{\sim}{t}^+\|^2 = \underset{\sim}{t}^+ \cdot \underset{\sim}{t}^+$

$\|\underset{\sim}{t}^+\|^2 = t_i^+ t_i^+ = (Q_{ij} t_j)(Q_{im} t_m) = Q_{ij} Q_{im} t_j t_m = \delta_{jm} t_j t_m$

$\therefore \|\underset{\sim}{t}^+\| = \|\underset{\sim}{t}\|$

$\underset{\sim}{t}^+ \cdot \underset{\sim}{n}^+ = t_i^+ n_i^+ = (Q_{ij} t_j)(Q_{im} n_m) = t_i n_i = \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{n}$

$\underset{\sim}{t}^+ \cdot \underset{\sim}{n}^+ = \|\underset{\sim}{t}^+\| \cdot \|\underset{\sim}{n}^+\| \cos\theta^+ = \|\underset{\sim}{t}\| \cdot \|\underset{\sim}{n}\| \cos\theta \quad \therefore \theta^+ = \theta$

موضوع: Constitutive Equation's (Noll Theory) تاریخ: ....

معادلات متشکله (تئوری نول)

نول در سال ۱۹۵۰ ، ۳ اصل را در معادلات متشکله پایه‌گذاری کرد

۱. اصل تعینیت یا (Principle of Determinism) یعنی اگر تاریخچه حرکت را داشته باشیم $\underline{T}(\underline{Y},t) = \mathcal{F}(\chi^t, Y, t)$ به شرطی که $\mathcal{F}$ یک فانکشنال کلی است.

۲. اصل اثر موضعی یا (Principle of Local Action) یعنی تنش در یک نقطه ، با نقاطی که در فاصله دوری از آن قرار دارند ارتباطی ندارد یا تنها همسایگی یا حجم بسیار کوچک در اطراف نقطه در خصوص معادلات متشکله کفایت می‌کند. به بیان دیگر این اصل در تحلیل تئوری مواد مخلوط (Mixture) یا مواد حفره‌ای است.

۳. اصل عدم تغییر چارچوب مادی یا (Principle of Material Frame In.)

به عنوان مثال از انواع معادلات متشکله می‌توان به سیال راینر - ریولین اشاره کرد (Reiner - Rivlin Fl.)

$$\underline{T} = \underline{\mathcal{T}}(\rho, \underline{v}, \underline{L}) \quad ; \quad \underline{L} = \nabla \underline{v} = \underline{D} + \underline{W}$$

$$\underline{T} = \bar{T}(\rho, \underline{v}, \underline{D}, \underline{W})$$

$$t_{ij} = t^*_{ij}(\rho, v_m, d_{mn}, W_{mn})$$

در مورد اصل چهارم می‌توان اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب المانی را مورد نظر قرار داد

$$t^+_{ij} = \bar{t}_{ij}(\rho^+, v^+_m, d^+_{mn}, W^+_{mn})$$

$$\underline{T}^+ = \bar{T}(\rho^+, v^+_m, \underline{D}^+, \underline{W}^+) \quad ; \quad \underline{T}^+ = \underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^T \quad ; \rho^+ = \rho$$

$$\underline{v}^+ = \underline{Q}\underline{v} + \dot{\underline{Q}}\underline{x} + \dot{\underline{a}}$$

$$\underline{D}^+ = \underline{Q}\,\underline{D}\,\underline{Q}^T \ , \quad \underline{W}^+ = \underline{Q}\,\underline{W}\,\underline{Q}^T + \underline{\Omega} \quad ; \underline{\Omega} = \dot{\underline{Q}}\underline{Q}^T$$

$$\underline{Q}\,\bar{T}(\rho, \underline{v}, \underline{D}, \underline{W})\,\underline{Q}^T = \bar{T}(\rho^+, \underline{v}^+, \underline{D}^+, \underline{W}^+)$$

$$\forall\ \underline{Q} \quad s.t \quad \underline{Q}\underline{Q}^T = \underline{Q}^T\underline{Q} = \underline{I}$$

حال به بررسی حالتهای خاص می‌پردازیم :

الف) انتقال : $\underline{Q} = \underline{I} \ ; \ \dot{\underline{Q}} = \underline{0}$

$$\therefore \quad \rho^+ = \rho \ , \quad \underline{D}^+ = \underline{D} \ , \quad \underline{v}^+ = \underline{v} + \dot{\underline{a}} \ , \quad \underline{W}^+ = \underline{W}$$

با جابجایی داریم :

موضوع: .... تاریخ: ....

قانون تبدیل تانسورهای تنش پیولا - کیرشهف :

$$J\,\underline{T} = \underline{P}\,\underline{F}^T$$

$$J^+\underline{T}^+ = \underline{P}^+(\underline{F}^+)^T \rightarrow J\,\underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^T = \underline{P}^+(\underline{Q}\,\underline{F})^T$$

$$J\,\underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^T = \underline{P}^+\underline{F}^T\underline{Q}^T \rightarrow J\,\underline{Q}\,\underline{T} = \underline{P}^+\underline{F}^T \rightarrow \underline{P}^+ = \underline{Q}\,\underline{P}$$

$$\therefore \quad P^+_{iA} = Q_{ij}\,P_{jA}$$

$$\underline{P} = \underline{F}\,\underline{S} \rightarrow \underline{P}^+ = \underline{F}^+\underline{S}^+$$

$$\underline{F}^+\underline{S}^+ = \underline{Q}\,\underline{P} = \underline{Q}\,\underline{F}\,\underline{S} \rightarrow \underline{Q}\,\underline{F}\,\underline{S}^+ = \underline{Q}\,\underline{F}\,\underline{S} \rightarrow \underline{S}^+ = \underline{S}$$

$$\therefore \quad S^+_{AB} = S_{AB}$$

معادله حرکت :

$$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i = \rho \dot{v}_i$$

$$\partial t^+_{ij}/\partial x^+_j + \rho^+ b^+_i = \rho^+ a^+_i \qquad \frac{\partial t^+_{ij}}{\partial x^+_j} = \frac{\partial}{\partial x^+_j}(Q_{im}\,Q_{jn}\,t_{mn}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(Q_{im}\,Q_{jn}\,t_{mn})\frac{\partial x_k}{\partial x^+_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t^+_{ij}}{\partial x^+_j} = Q_{im}\,Q_{jn}\,Q_{jk}\frac{\partial t_{mn}}{\partial x_k}$$

$$= Q_{im}\,t_{mn,n}$$

$$\rho^+(a^+_i - b^+_i) = Q_{im}\,\rho\,(a_m - b_m) \rightarrow a^+_i - b^+_i = Q_{im}\,(a_m - b_m)$$

$$Q_{im}\,t_{mn,n} = Q_{im}\,\rho\,(a_m - b_m)$$

$$\therefore \quad t_{mn,n} + \rho\,b_m = \rho\,a_m$$

$$a^+_i - b^+_i = Q_{im}(a_m - b_m)$$

$$\dot{v}^+_i - b^+_i = Q_{im}(a_m - b_m)$$

$\hat{T}(\rho, v, D, W) = \hat{T}(\rho, v + \dot{Q}, D, W)$

پس واضح است که T نمی‌تواند بستگی به v داشته باشد.

ب) $\Rightarrow$: $Q = I$, $\dot{Q} \neq 0$

for example : $Q = Q(t) = \exp(\Omega(t - t_0))$

$Q Q^T = \exp(\Omega(t - t_0)) \cdot \exp(\Omega^T(t - t_0)) = \exp((\Omega + \Omega^T)(t - t_0)) = I$

$Q(t_0) = I$, $\dot{Q}(t_0) = \Omega \neq 0$, $\dot{Q}(t) = \Omega \exp(\Omega(t - t_0))$

$\Omega = \dot{Q} \neq 0$, $\rho^+ = \rho$, $D^+ = D$, $W^+ = W + \Omega$

$\hat{T}(\rho, D, W) = \hat{T}(\rho, D, W + \Omega)$

واضح است که T نمی‌تواند تابعی از W

ج) Material Fram Indifference.

$Q \hat{T}(\rho, D) Q^T = \hat{T}(\rho, Q D Q^T)$

$\forall Q$. s.t $Q Q^T = Q^T Q = I$

$\hat{t}_{ij}(\rho, Q_{rs} Q_{pt} Q_{st}) = Q_{im} Q_{jn} t_{mn}(\rho, d_{\ell p})$

$Q \hat{T}(\rho, D) Q^T = \hat{T}(\rho, Q D, Q^T)$

چون به Q بستگی ندارد این رابطه عوض نمی‌شود. لذا این رابطه بایستی برای کلیه تانسورهای متعامد لازم از خاص منفی مختلف بر ... این نوع ارتباط را، ارتباط ایزوتروپی گویند. سیال با معادله مشخصه $T = T(\rho, D)$ با شرط فوق را سیال رانیر - ریولین گوییم.

★ حالت خاص: ارتباط بین T و D خطی باشد.

$\hat{t}_{ij} = \bar{A}_{ij}(\rho) + \bar{A}_{ijkl}(\rho) d_{kl}$

$\bar{A}_{ij}(\rho) = \bar{A}_{ji}(\rho)$ ؛ یعنی که A_{ij} یک تانسور متقارن مرتبه ۲ است.

$\bar{A}_{ijkl}(\rho) = \bar{A}_{ijlk}(\rho) = \bar{A}_{jikl}(\rho) = \bar{A}_{ijlk}(\rho)$

همچنین $\bar{A}_{ijkl}$ یک تانسور متقارن مرتبه ۴ است که با توجه به تقارن تانسور تنش نسبت به i, j متقارن بوده، با توجه به تقارن تانسور نرخ تغییر فرم نسبت به k, l نیز متقارن است.

★ عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی :

$t^+_{ij} = \bar{A}_{ij}(\rho) + \bar{A}_{ijkl}(\rho) d^+_{kl}$

$t^+_{ij} = Q_{im} Q_{jn} t_{mn} = Q_{im} Q_{jn} [\hat{A}_{mn} + \hat{A}_{mnkl} d_{kl}]$

$= \hat{A}_{ij} + \hat{A}_{ijkl}(Q_{kp} Q_{ls} d_{ps})$

$\Rightarrow Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mn} + Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mnkl} d_{kl}$

$= \hat{A}_{ij} + Q_{kp} Q_{ls} \hat{A}_{ijkl} d_{ps}$

رابطه فوق بایستی برای کلیه تانسورهای متعامد Q و تنسورهای دلخواه برقرار باشد. لذا اگر را مساوی صفر بگیریم $d_{ij} = 0$ را داریم:

$\hat{A}_{ij} = Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mn}$

$Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mnkl} d_{kl} = Q_{kp} Q_{ls} \hat{A}_{ijkl} d_{ps}$

$(Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mnps} - Q_{kp} Q_{ls} \hat{A}_{ijkl}) d_{ps} = 0 \quad \forall \; d_{ps} = d_{sp}$

با توجه به استقلال ضریب از D و تقارن آن نسبت به p, s داریم:

$Q_{im} Q_{jn} \bar{A}_{mnps} = Q_{kp} Q_{ls} \bar{A}_{ijkl}$

$\bar{A}_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{ls} \bar{A}_{mnps}$

از روابط فوق نتیجه می‌گیریم که A_{ij} و $\hat{A}_{ijkl}$ بایستی به ترتیب تانسورهای ایزوتروپ مرتبه ۲ و ۴ با تقارنهای ذکر شده فوق باشند.

تانسورهای ایزوتروپیک Isotropic Tensors

تعریف: تانسوری را ایزوتروپیک گوییم که مولفه‌های آن در تمامی دستگاه‌های مختصات یکسان باشد.

۱) تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۱، اگر بردار v یک بردار دلخواه ایزوتروپیک باشد، بایستی

$$v_i = a_{ij} v_j \quad \forall a_{ij} \ \text{s.t} \ a_{ij}\delta_{kj} = \delta_{ik}$$

مثال: تانسور a_{ij} را بصورت مقابل درنظر بگیرید

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

یعنی تنها تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۱، بردار صفر است.

۲) تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۲.

$$T_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn}$$
$$\forall a_{ij} \ \text{s.t} \ a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$

به عنوان مثال، همان مثال قبل را می‌توان درنظر گرفت با این تفاوت که:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{11} = a_{22} = -1, \quad a_{33} = 1, \quad a_{ij} = 0$$

$$T_{13} = a_{1m} a_{3n} T_{mn} = a_{11} a_{33} T_{13} = -T_{13} \Rightarrow T_{13} = 0$$

به همین ترتیب: $T_{31} = T_{23} = T_{32} = 0$

به عنوان مثال، اگر a_{ij} بصورت مقابل باشد

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_{12} = T_{21} = 0$$

با استناد به از مثالهای ذکر شده (حالتهای خاص) تا اینجا معلوم شده، بایستی T_{ij} قطری باشد، به عنوان مثال دیگر a_{ij} را بصورت مقابل درنظر بگیرید

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{بقیه: } a_{ij} = 0$$
$$a_{12} = -1, \quad a_{21} = +1, \quad a_{33} = 1$$

$$T_{ij} = a_{im} a_{jn} T_{mn}$$
$$T_{11} = a_{1m} a_{1n} T_{mn} = a_{12} a_{12} T_{22} = T_{22}$$
$$\Rightarrow T_{11} = T_{22}$$

به عنوان مثال a_{ij} را بصورت مقابل درنظر بگیرید

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{22} = a_{2m} a_{2n} T_{mn} = a_{23} a_{23} T_{33} = T_{33}$$

پس بایستی: $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ یعنی بایستی T ضریبی از ماتریس همانی باشد $T_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ یا $T = \alpha I$؛ این شرط کافی هم هست زیرا:

$$\alpha \delta_{ij} = a_{im} a_{jn} (\alpha \delta_{mn})$$
$$= \alpha a_{im} a_{jm} = \alpha \delta_{ij}$$

۳) تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۳.

$$T_{ijk} = a_{im} a_{jn} a_{kp} T_{mnp} \qquad \forall a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$
$$\det(\delta_{ij}) = \det(a_{ij}) = +1$$

با درنظرگرفتن حالتهای خاص مختلف نتیجه می‌گیریم که شرط لازم و کافی برای آنکه T_{ijk} یک تانسور ایزوتروپیک باشد این است که:

$$T_{ijk} = \alpha \varepsilon_{ijk}$$

۴) تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۴.

$$T_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$\delta_{ik}\delta_{jl}$$
$$\delta_{il}\delta_{jk}$$
$$= \alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta \delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma \delta_{il}\delta_{jk}$$

سیال راینر - ریولین خطی ، با معادله مشخص می‌شود: $t_{ij} = \hat{A}_{ij} + \hat{A}_{ijkl}\, d_{kl}$

به شرطی که $\hat{A}_{ij}$ تانسور ایزوتروپیک مرتبه دوم $\hat{A}_{ij} = Q_{im} Q_{jn} \hat{A}_{mn}$

و $\hat{A}_{ijkl}$ تانسور ایزوتروپیک مرتبه چهارم است.

$\hat{A}_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kr} Q_{ls} \hat{A}_{mnrs}$

$\Rightarrow \hat{A}_{ij} = -P(\rho)\, \delta_{ij}$

$\Rightarrow \hat{A}_{ijkl} = \lambda(\rho)\, \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\rho)\, \delta_{ik}\delta_{jl} + \mu(\rho)\, \delta_{il}\delta_{jk}$

به دلیل تقارن نسبت به اندیسهای i و j ، k ، l :

$t_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu\, d_{ij}$

سیال راینر - ریولین خطی همان سیال نیوتنی است که P در واقع فشار ترمودینامیکی یا "استاتیکی" Thermodynamic. P ، λ ، μ را ضرایب لزجت یا Viscosity Coefficient گوییم. و به فرم مستقیم می‌توان نوشت:

$\underline{T} = -P\underline{I} + \lambda (tr\underline{D})\, \underline{I} + 2\mu \underline{D}$

$d_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$

$t_{ij} = -P\delta_{ij} + \lambda v_{k,k}\, \delta_{ij} + \mu(V_{i,j} + v_{j,i})$

$\underline{T} = -P\underline{I} + \lambda \nabla\cdot\underline{v}\, \underline{I} + \mu[(\nabla\underline{v}) + (\nabla\underline{v})^T]$

نکته: تنها تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۳ متقارن ، فقط تانسور صفر است. برای سیال تراکم ناپذیر

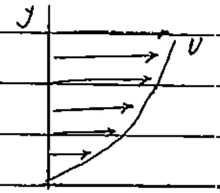
$\nabla\cdot\underline{v} = div\,\underline{v} = 0 \quad or \quad tr\,\underline{D} = 0$ $\quad$ $=0$ ضرب داریم:

$\Rightarrow t_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu\, d_{ij}$

$\Rightarrow t_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$

بنابراین در سیال تراکم ناپذیر فقط یک ضریب ویسکوزیته داریم.

مثال ۴: جریان یک بعدی سیال که $\underline{v}$ فقط تابع y است.



$\underline{v} = \underline{v}(y) \Rightarrow v_1 = v_y \ , \ v_2 = 0$

$t_{12} = T = \mu\, v_{1,2} \Rightarrow T = \mu \frac{dv}{dy}$

رابطه فوق در واقع تعریف ضریب ویسکوزیته است که نسبت تنش برشی به گرادیان سرعت است.

مثال ۲. برای سیال غیرلزج که تنش برشی نداریم ، در این حالت تانسور تنش فقط تابع ρ است ،

بنابراین در این حالت تانسور تنش ایزوتروپیک است.

$\underline{T} = \hat{\underline{T}}(\rho) \rightarrow \underline{T} = -P\underline{I} \ , \ P = P(\rho) \quad t_{ij} = -P(\rho)\,\delta_{ij}$

جسم الاستیک " Elastic Body "

جسم الاستیک جسمی است که در آن تنش نقطه به گرادیان تغییر شکل وابسته است یعنی تنش تابع گرادیان تغییر است ، چنین جسمی را جسم الاستیک کوشی می‌نامند.

$\underline{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{F})$

حال اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی را اجرا می‌کنیم:

$\underline{T}^+ = \hat{\underline{T}}(\underline{F}^+)$

$\underline{T}^+ = \underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^T$

$\hat{\underline{T}}(\underline{F}^+) = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}(\underline{F})\,\underline{Q}^T \qquad \forall\, \underline{Q} \ s.t\ \underline{Q}\underline{Q}^T = \underline{Q}^T\underline{Q} = \underline{I}$

$\Rightarrow \hat{\underline{T}}(\underline{Q}\underline{F}) = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}(\underline{F})\,\underline{Q}^T$

$\Rightarrow \hat{\underline{T}}(\underline{Q}\underline{R}\underline{U}) = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}(\underline{F}\underline{Q}^T)$

به عنوان مثال اگر $\underline{Q} = \underline{R}^T$ در نظر گرفته شود ، شرط لازم استخراج می‌شود

$\bar{\underline{T}}(\underline{U}) = \underline{R}^T\, \underline{T}(\underline{F})\, \underline{R} \rightarrow \underline{T}(\underline{F}) = \underline{R}\, \hat{\underline{T}}(\underline{U})\, \underline{R}^T$

شرط فوق کافی نیز هست زیرا اگر $\underline{T}(\underline{F}) = \underline{R}\,\hat{\underline{T}}(\underline{U})\,\underline{R}^T$ آنگاه داریم:

$\hat{\underline{T}}(\underline{F}^+) = (\underline{R}^+)\,\hat{\underline{T}}(\underline{U}^+)(\underline{R}^+)^T = \underline{Q}\,\underline{R}\,\hat{T}(\underline{U})\,\underline{R}^T\underline{Q}^T = \underline{Q}\,\hat{\underline{T}}(\underline{F})\,\underline{Q}^T$

یعنی شرط فوق تحت حرکت صلب الحاقی برقرار است ، معادلات فوق را می‌توان به صورتهای مختلف نوشت:

$\underline{U} = \underline{C}^{1/2} \rightarrow \underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I})$

$\hat{T}(\underline{F}) = F\underline{U}^{-1}\,\hat{T}(\underline{U})\,\underline{U}^{-1}\underline{F}^T = \underline{F}\,\tilde{\underline{T}}(\underline{C})\,\underline{F}^T = \underline{F}\,\bar{\underline{\bar{T}}}(\underline{E})\,\underline{F}^T$

بنابراین جسم الاستیک کوشی اصل عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی را ارضا می‌کند مشروط بر اینکه $\hat{T}$ تابعی از $\underline{U}$ یا $\underline{C}$ باشد که به صورت ساندویچ بین $\underline{F}$ و $\underline{F}^T$ قرار می‌گیرد ضمن اینکه $\underline{U}$ ، $\underline{C}$ خود ارتباطی با $\underline{F}$ دارند.

برخلاف سیال، $\underline{T}$ می‌تواند هر تابعی از $\underline{C}$ یا $\underline{E}$ باشد. در بحث جسم الاستیک کوشی با انرژی کرنشی کاری نداشتیم. اما تجربه ثابت کرده است که همزمان با تغییر فرم در یک جسم مقداری انرژی کرنشی در جسم ذخیره می‌شود. در این بخش به بررسی انرژی کرنشی می‌پردازیم:

انرژی کرنشی و جسم الاستیک گرین (Hyper-elastic)

در حقیقت جسم الاستیک گرین یک زیرمجموعه‌ای از جسم الاستیک کوشی است. بنابراین هر جسم الاستیک گرین حتماً جسم الاستیک کوشی است

نرخ کار انجام شده توسط نیروی بدنه $R_b = \int_R \rho \underline{b}\cdot\underline{v}\, dv = \int_R \rho b_i v_i\, dv$

نرخ کار انجام شده توسط نیروی سطحی $R_c = \int_{\partial R} \underline{t}\cdot\underline{v}\, da \qquad R = R_b + R_c$

$$= \int_{\partial R} (\underline{t}_i\cdot\underline{v})\, n_i\, da = \int_{\partial R} t_{mi}\, \underline{e}_m\cdot\underline{v}\, n_i\, da$$

$\therefore R = R_b + R_c$

$$\therefore R_c = \int_{\partial R} (t_{mi} v_m n_i)\, da = \int_R (t_{mi} v_m)_{,i}\, dv$$

$$\therefore R_c = \int_R (t_{mi,i} v_m + t_{mi} v_{m,i})\, dv$$

از طرفی طبق اصل بقای انرژی داریم:

$$R = R_b + R_c = \int_R (t_{ki,i} + \rho b_k) v_k\, dv$$

$$+ \int_R (t_{ki} v_{k,i})$$

$$\Rightarrow R = \int_R \rho \dot{v}_k v_k\, dv + \int_R t_{ki} v_{k,i}\, dv$$

$$\Rightarrow R = \int_R \rho a_k v_k\, dv + \int_R t_{ki} v_{k,i}\, dv$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\int_R \frac{1}{2}\rho\, \underline{v}\cdot\underline{v}\, dv = \int_R \left[\overline{(\tfrac{1}{2}\rho\, \underline{v}\cdot\underline{v})} + \tfrac{1}{2}\rho v_k v_k v_{i,i}\right] dv$$

$$\frac{dK}{dt} = \int_R \rho \dot{v}_i v_i\, dv$$

اصل بقای انرژی یا قانون اول ترمودینامیک حاکی از آن است که تغییرات انرژی جنبشی جسم در هر زمان تأمین شده به جسم می‌باشد. البته معادله مقابل اصل بقای انرژی نیست و صرفاً یک اتحاد است. به بیان دیگر اصل بقای انرژی مکانیکی است.

$$R = R_b + R_c = \frac{dK}{dt} + \int_R t_{ki} v_{k,i}\, dv$$

$$t_{ki} v_{k,i} = t_{ki}(d_{ki} + w_{ki}) = t_{ki} d_{ki} = tr(\underline{T}\,\underline{D}) = \underline{T}:\underline{D} = \underline{T}\cdot\underline{D}$$

اگر تابع $\Sigma = \hat{\Sigma}(\underline{X}, t)$ در رابطه موجود داشته باشد به طوری که $\dot{\Sigma} = t_{ki} d_{ki}/\rho$ در این صورت Σ را انرژی کرنشی در واحد جرم محیط پیوسته گوییم. در این صورت کل انرژی کرنشی ناحیه R عبارت است از

$$\mathcal{U} = \int_R \rho \Sigma\, dv$$

مثل جنبشی نرخ تغییرات انرژی کرنشی را حساب کنیم داریم:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_R \rho \dot{\Sigma}\, dv$$

$$= \int_R t_{ni} d_{ni}\, dv \qquad \therefore R = R_b + R_c = \frac{dK}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt}$$

در تئوری هیچ تغییر شکلی نداریم مقدار $\dot{\Sigma}$ برابر صفر می‌شود و فقط dK/dt خواهیم داشت. و حال معادله اصل بقای انرژی نیز به صورت اصل بقای انرژی مکانیکی برای جسمی که دارای انرژی کرنشی باشد به صورت فوق در می‌آید. چنانچه برای تابع انرژی کرنشی در رابطه Σ معادله مشخصه به فرم $\Sigma = \hat{\Sigma}(\underline{F})$ داشته باشیم در این صورت جسم را Hyper-Elastic گوییم. (یا الاستیک گرین)

" عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی "

$$\Sigma^+ = \hat{\Sigma}(\underline{F}^+) \quad ; \quad \Sigma^+ = \Sigma$$

چون تحت حرکت صلب الحاقی انرژی کرنشی تغییر نمی‌کند داریم:

$$\hat{\Sigma}(\underline{F}) = \hat{\Sigma}(\underline{U}) = \hat{\Sigma}(\underline{U}(\underline{C})) = \bar{\Sigma}(\underline{C}) = \bar{\bar{\Sigma}}(\underline{E}) = \Sigma'(\underline{Q}\underline{F}) = \Sigma''(\underline{Q}\underline{R}\underline{U})$$

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T = 2\rho \underset{\sim}{F} \frac{\partial \tilde{\Sigma}}{\partial \underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{F}^T$$

برحسب کرنش لاگرانژی :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T = \rho \underset{\sim}{F} \frac{\partial \Sigma}{\partial \underset{\sim}{E}} \underset{\sim}{F}^T$$

$$t_{ij} = t_{ji} = \rho \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{AB}} F_{iA} F_{jB}$$

$$A_{ij} B_{ij} = tr(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^T) = \underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{B}$$

Material Symmetry « تقارن‌های مادی »

گروه : مجموعهٔ A با قانون ترکیب T را گروه G گوییم اگر از ویژگی‌های زیر تبعیت کند

1. $\forall\ a, b, c \in G \quad (ab)c = a(bc)$
2. $\exists\ e \in G \ \ s.t \quad ae = ea = a$
3. $\forall\ a \in G \ \ \exists\ a^{-1} \in G \quad a a^{-1} = a^{-1} a = e$

$$T(ab) \triangleq (ab)$$

به طور مثال مجموعهٔ کلیهٔ عملگرهای غیرخطی غیرمنفرد و یا ماتریس‌های $n\times n$ غیرمنفرد، تشکیل یک گروه می‌دهند. به عنوان مثال دیگر مجموعهٔ کلیهٔ ماتریس‌های متعامد تشکیل گروه می‌دهند زیرا اگر Q_1 و Q_2 متعامد باشند $Q_1 Q_2$ نیز متعامد است.

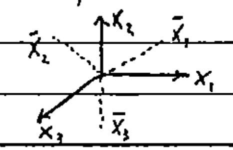
$$\underset{\sim}{Q}_1^T = \underset{\sim}{Q}_1^{-1} \quad ; \quad \underset{\sim}{Q}_2^T = \underset{\sim}{Q}_2^{-1}$$

$$(\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^T(\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2) = \underset{\sim}{Q}_2^T\underset{\sim}{Q}_1^T\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2 = \underset{\sim}{Q}_2^T(\underset{\sim}{Q}_1^T\underset{\sim}{Q}_1)\underset{\sim}{Q}_2 = \underset{\sim}{I}$$

$\Rightarrow (\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^T = (\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2)^{-1}$ یعنی $Q_1 Q_2$ متعامد است

فرض کنید در دستگاه مختصات مرجع X_A تابع چگالی انرژی هایپرالاستیک به صورت $\Sigma = \bar{\Sigma}(\underset{\sim}{E})$ باشد
اگر دستگاه مختصات متعامد $\bar{X}_A$ را در نظر بگیریم که ارتباط آن با دستگاه X_A توسط ضرایب تبدیل

$$H_{AB} = \frac{\partial X_A}{\partial \bar{X}_B}$$



این شرط کافی نیز هست. در جسم هایپرالاستیک انرژی کرنشی تابع تانسور کرنش گرین است.

$$t_{ki} d_{ki} = trace(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{D}) = trace(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{D}^T)$$

یادآوری :

$$t_{mi} d_{mi} = \rho \dot{\Sigma} \qquad U = \int_R \rho \Sigma \, dv$$

$$R = R_c + R_b = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \qquad \Sigma = \hat{\Sigma}(\underset{\sim}{C}) = \tilde{\Sigma}(\underset{\sim}{E}) \qquad \text{Hyperelastic.}$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} \dot{C}_{AB} \qquad C_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} \rightarrow \dot{C}_{AB} = \dot{x}_{i,A} x_{i,B} + x_{i,A} \dot{x}_{i,B}$$

$$\therefore \dot{C}_{AB} = v_{i,A} x_{i,B} + x_{i,A} v_{i,B}$$

$$= v_{i,m} x_{m,A} x_{i,B} + v_{i,m} x_{m,B} x_{i,A} = (v_{i,m} + v_{m,i}) x_{m,A} x_{i,B}$$

$$= 2 d_{im} x_{i,A} x_{m,B}$$

$$\therefore \dot{\underset{\sim}{C}} = 2 \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{F}$$

$$\dot{E}_{AB} = 1/2\, \dot{C}_{AB} = d_{im} x_{i,A} x_{m,B} \ \therefore \ \dot{\underset{\sim}{E}} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{F}$$

$$\dot{\Sigma} = 2/2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} \frac{\partial C_{AB}}{\partial t} = 2/2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} \dot{C}_{AB} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} d_{im} F_{iA} F_{mB}$$

$$t_{ki} d_{ki} = \rho \dot{\Sigma} = 2\rho \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} F_{iA} F_{kB} d_{ki}$$

$$\left(t_{ki} - 2\rho \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}}\right) F_{iA} F_{kB}\right) d_{ki} = 0$$

رابطهٔ فوق بایستی به ازای هر نرخ تغییر فرم دلخواه برقرار باشد. لذا ضریب مربوطه مستقل از D و نسبت به دو اندیس i و k متقارن است

$$\therefore t_{ki} = t_{ik} = 2\rho \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{AB}} x_{i,A} x_{k,B}$$

حال اگر بخواهیم از تنش مستقیم استفاده کنیم داریم :

مشخص شده باشد در ایزوتروپی : $H_{AB}H_{AM} = \delta_{BM}$

بنابراین : $H_{AB}H_{MB} = \delta_{AM}$

$$E_{AB} = H_{AM}H_{BN}\bar{E}_{MN} \qquad \bar{E}_{AB} = H_{MA}H_{NB}E_{MN}$$

پاسخ ماده هایپرالاستیک در دستگاه جدید

$$\Sigma = \bar{\Sigma}(H_{AM}H_{BN}\bar{E}_{MN}) = \tilde{\Sigma}(\bar{E}_{AB})$$

تعریف: اگر تحت زیرگروهی از گروه ... پاسخ ماده هایپرالاستیک تغییر نکند در ایزوتروپی گوئیم تحت آن زیرگروه تقارن مادی داریم. عدم تغییر پاسخ یعنی $\tilde{\Sigma}(\bar{E}_{AB}) = \bar{\Sigma}(\bar{E}_{AB})$

اگر جسم غیرمتقارن باشد یعنی هیچ گونه تقارن مادی نداشته باشد در ایزوتروپی گوئیم تحت آن زیرگروه تقارن مادی داریم: عدم تغییر پاسخ یعنی $\tilde{\Sigma}(\bar{E}_{AB}) = \bar{\Sigma}(\bar{E}_{AB})$

اگر جسم غیرمتقارن باشد یعنی هیچ گونه تقارن مادی نداشته باشد در ایزوتروپی زیرگروه تعامد فقط شامل ماتریس همانی است یعنی $H_{AB} = \delta_{AB}$

Linear Elasticity — الاستیسیته خطی

$$t_{ij} = \rho\, x_{i,A}\, x_{j,B}\frac{\partial\bar{\Sigma}}{\partial\bar{E}_{AB}} \quad ; \quad \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u} \quad ; \quad \rho_0 = \rho J$$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} + \nabla\underset{\sim}{u} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

تمایز بین هیئت‌های مرجع از بین می‌رود

$$J = \det\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1+u_{3,3} \end{pmatrix} \simeq 1 + u_{i,i}$$

$$J = 1 + u_{i,i}$$

$$J^{-1} = 1 - u_{i,i} \qquad J = \frac{dv}{dV} = \frac{dV + \Delta dV}{dV} = 1 + \frac{\Delta dV}{dV} = 1 + u_{i,i}$$

$$\therefore \frac{\Delta dV}{dV} = u_{i,i} = e_{ii}$$

$$t_{ij} = \rho_0(1 - u_{m,m})(\delta_{ik} + u_{i,k})(\delta_{jl} + u_{j,l})\frac{\partial\bar{\Sigma}}{\partial e_{kl}}$$

$$\text{in Linear Theory} \rightarrow t_{ij} = \rho_0\frac{\partial\bar{\Sigma}}{\partial e_{ij}}$$

می‌خواهیم رابطه بین تنش و کرنش خطی باشد، برای اینکه ارتباط بین t_{ij} و e_{ij} خطی باشد، باید ارتباط $\bar{\Sigma}$ با e_{ij} از درجه ۲ باشد. در نتیجه:

$$\rho_0\bar{\Sigma} = \tfrac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \qquad t_{ij} = \rho_0\frac{\partial\bar{\Sigma}}{\partial e_{ij}} = C_{ijkl}e_{kl}$$

C_{ijkl} یک تانسور مرتبه ۴ است که دارای تقارن‌های زیر است:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

تقارن مادی در الاستیسیته خطی

$$\tfrac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \tfrac{1}{2}C_{ijkl}(H_{im}H_{jn}\bar{e}_{mn})(H_{kr}H_{ls}\bar{e}_{rs})$$

$$= \tfrac{1}{2}C_{ijkl}H_{im}H_{jn}H_{kr}H_{ls}\bar{e}_{mn}\bar{e}_{rs}$$

حال چنانچه

$$\tfrac{1}{2}C_{ijkl}e_{ij}e_{kl} = \tfrac{1}{2}C_{ijkl}\bar{e}_{ij}\bar{e}_{kl}$$

در ایزوتروپی تحت زیرگروهی که توسط ماتریس‌های متعامد (H_{ij}) مشخص می‌شود، تقارن داریم.

$$\tfrac{1}{2}C_{ijkl}H_{im}H_{jn}H_{kr}H_{ls}\bar{e}_{mn}\bar{e}_{rs} = \tfrac{1}{2}C_{mnrs}\bar{e}_{mn}\bar{e}_{rs}$$

$$(C_{mnrs} - C_{ijkl}H_{im}H_{jn}H_{kr}H_{ls})\bar{e}_{mn}\bar{e}_{rs} = 0$$

با توجه به استقلال ضرایب از کرنش و تقارن آن نسبت به (m, n) و (r, s) و زوج (rs, mn) در ایزوتروپی

$$C_{mnrs} = C_{ijkl}H_{im}H_{jn}H_{kr}H_{ls}$$

$$C_{ijkl} = H_{im}H_{jn}H_{kr}H_{ls}C_{mnrs} \qquad (*)$$

حالت (۱) جسم هیچ گونه تقارن مادی ندارد، جسم کاملاً غیرایزوتروپیک است. در ایزوتروپی $H_{ij} = \delta_{ij}$ یعنی گروه تعامد فقط شامل ماتریس همانی است، در ایزوتروپی رابطه (*) هیچ تغییری بر مؤلفه‌های C_{ijkl} تحمیل نمی‌کند و با توجه به تقارن‌های

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

۲۱ ثابت مستقل داریم که عبارتند از

C_{1111}	C_{1112}	C_{1113}	C_{1122}	C_{1123}	C_{1133}
	C_{1212}	C_{1213}	C_{1222}	C_{1223}	C_{1233}
		C_{1313}	C_{1322}	C_{1323}	C_{1333}
			C_{2222}	C_{2223}	C_{2233}
				C_{2323}	C_{2333}
					C_{3333}

$$t_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl}$$

$$t_{12} = C_{12kl}\, e_{kl} = C_{1211} e_{11} + C_{1222} e_{22} + C_{1233} e_{33} + 2C_{1212} e_{12} + 2C_{1223} e_{23} + 2C_{1213} e_{13}$$

$$\rho\Sigma = \tfrac{1}{2} C_{ijkl}\, e_{ij}\, e_{kl}$$

اگر داشته باشیم:

$$\tfrac{1}{2} C_{ijkl}\, e_{ij}\, e_{kl} = \tfrac{1}{2} C_{ijkl}\, \bar{e}_{ij}\, \bar{e}_{kl}$$

$$\bar{e}_{ij} = H_{mi} H_{nj}\, e_{mn} \quad ; \quad e_{ij} = H_{im} H_{jn}\, \bar{e}_{mn}$$

معمولاً تقارن مادی تحت زیرگروهی که توسط ماتریسهای متعامد (H_{ij}) مشخص شده است که

$$C_{ijkl} = H_{im} H_{jn} H_{kr} H_{ls}\, C_{mnrs}$$

رابطه بین تنش - کرنش را می‌توان بصورت فشرده ماتریسی بصورت زیر نوشت

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{e}$$

به قسمی که:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \langle t_{11}\ t_{22}\ t_{33}\ t_{12}\ t_{23}\ t_{13} \rangle^T$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \langle \sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{xz} \rangle^T$$

$$\underset{\sim}{e} = \langle e_{11}\ e_{22}\ e_{33}\ 2e_{12}\ 2e_{23}\ 2e_{13} \rangle^T$$

$$\underset{\sim}{e} = \langle \varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z\ \gamma_{xy}\ \gamma_{yz}\ \gamma_{xz} \rangle^T$$

$$\left.\begin{array}{ll} (11) \to 1 & (12) \to 4 \\ (22) \to 2 & (23) \to 5 \\ (33) \to 3 & (13) \to 6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} C_{11} \triangleq C_{1111} & C_{22} \triangleq C_{2222} \\ C_{14} \triangleq C_{1112} & C_{15} \triangleq C_{1123} \end{array}$$

در این صورت داریم:

$$\begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{33} \\ t_{12} \\ t_{23} \\ t_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & Sym & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{12} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \end{Bmatrix}$$

حالت (۱۲) جسم الاستیک خطی دارای یک صفحه تقارن است. (Monoclinic)

فرض کنید صفحه x_1x_2 صفحه تقارن ماده باشد. در این صورت گروه تقارن، علاوه بر ماتریس همانی δ_{ij}، شامل ماتریس H_{ij} بصورت زیر نیز هست:

$$\text{گروه تقارن } G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad H_{33} = -1$$

$$C_{ijkl} = H_{im} H_{jn} H_{kr} H_{ls}\, C_{mnrs}$$

$$C_{1113} = H_{1m} H_{1n} H_{1r} H_{3s}\, C_{mnrs}$$

$$= H_{11} H_{11} H_{11} H_{33}\, C_{1113} = -C_{1113} \Rightarrow C_{1113} = 0 \Rightarrow C_{16} = 0$$

آنهایی که اندیس ۳ به تعداد فرد دارند، صفر هستند یعنی:

$$C_{1123} = C_{15} = 0 \ ; \ C_{1213} = C_{46} = 0 \ ; \ C_{1333} = C_{36} = 0$$

$$C_{2223} = C_{45} = 0 \ ; \ C_{2333} = C_{35} = 0 \ ; \ C_{2213} = C_{26} = 0$$

$$C_{1223} = C_{25} = 0$$

در این صورت ۱۳ ثابت مستقل داریم.

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

حالت (۳) جسم الاستیک خطی دارای ۳ صفحهٔ تقارن عمود برهم باشد. (Orthotropic)

فرض کنید صفحات $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ صفحات تقارن ماده باشند، در اینصورت

گروه تقارن شامل ماتریسهای زیر هستند

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

از تانسور مرتبه چهارم C_{ijkl} آنهائی که دارای تعداد فردی ضریب ۲ ، ۳ دارند، صفر هستند

$$C_{1112} = C_{mnrs} H_{1m} H_{1n} H_{1r} H_{2s} = -C_{1112} \Rightarrow C_{1112} = 0$$

در اینصورت ۹ ثابت مستقل داریم ، برای چنین جسمی صفحهٔ $x_1 = 0$ نیز صفحهٔ تقارن

است یعنی جسم ۳ صفحهٔ تقارن دو بدو عمود برهم دارد. چنین ماده‌ای را ارتوتروپیک گویند

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & Sym & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

حالت (۴) جسم کاملاً ایزوتروپیک (Isotropic)

در اینصورت تقارن مادی تحت کل گروه تعامد برقرار است یعنی رابطهٔ فوق برای هر ماتریس

H_{ij} برقرار است ، در نتیجه C_{ijkl} یک تانسور مرتبه چهارم ایزوتروپیک است ،

$$C_{ijkl} = H_{im} H_{jn} H_{kr} H_{ls} C_{mnrs}$$

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

λ ، μ را ضرایب لامه (Lame) گویند.

$$t_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = \lambda e_{mm} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

$$\rho_0 \Sigma = \tfrac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} = \tfrac{1}{2} \lambda (e_{mm})^2 + \mu e_{ij} e_{ij}$$

$$= \tfrac{1}{2} \lambda (tr\, \underset{\sim}{e})^2 + \mu\, tr\, \underset{\sim}{e}^2$$

$$t_{mm} = 3\lambda e_{mm} + 2\mu e_{mm} \therefore e_{mm} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} t_{mm}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[t_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} t_{mm} \delta_{ij} \right]$$

بعنوان مثال:

$$e_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \left[t_{11} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (t_{22} + t_{33}) \right]$$

با مقایسه با رابطهٔ:

$$e_{11} = \frac{1}{E} \left[t_{11} - \nu (t_{22} + t_{33}) \right]$$

در نتیجه

$E = \mu (3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$: Young Modulus of Elasticity.

$\nu = \lambda / 2(\lambda + \mu)$: Poissons Ratio

$$\mu = G = E / 2(1 + \nu)$$

مدول الاستیسیته حجمی:

$$\frac{dv - dV}{dV} = J - 1 = e_{ii} = div\, \underset{\sim}{u}$$

$$\chi = \frac{\tfrac{1}{3} t_{mm}}{e_{mm}} = \frac{\tfrac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) e_{mm}}{e_{mm}} = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \; ; \; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \; ; \; \chi = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

معادلات حرکت در الاستیسیته خطی

$$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i = \rho a_i$$

$$(\lambda e_{mm} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij})_{,j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i \qquad e_{ij} = \tfrac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$[\lambda u_{m,m} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i$$

$$\therefore \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + \rho_0 b_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

معادلات فوق را معادلات ناویر-کوشی Navier-Cauchy گویند

$$\mu \nabla^2 \underset{\sim}{u} + (\lambda + \mu) \underset{\sim}{\nabla} (\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{u}) + \rho_0 \underset{\sim}{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \underset{\sim}{u}}{\partial t^2}$$

$J t_{ij} = P_{iA} x_{j,A} \;;\; \underline{x} = \underline{X} + \underline{u} \rightarrow J t_{ij} = P_{iA}(\delta_{jA} + u_{j,A})$

$J = 1 + u_{m,m} \Rightarrow (1 + u_{m,m}) t_{ij} = P_{iA}(\delta_{jA} + u_{j,A})$

$\Rightarrow t_{ij} = P_{ij}$

تبدیل معادله تعادل

$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i \qquad \rho = \rho_0 J^{-1} \simeq \rho_0 (1 - u_{m,m})$

$a_i = \ddot{u}_i \simeq \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad \left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \ll 1$

لذا معادله حرکت در الاستیسیته خطی به صورت زیر در می آید

$t_{ij,j} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i = \rho_0 \partial^2 u_i / \partial t^2$

$\mu \nabla^2 \underline{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) = \rho_0 \partial^2 \underline{u} / \partial t^2$

مسائل الاستواستاتیک و الاستودینامیک

$u = u_1 + u_2$

برای حل این مسئله را به دو قسمت تقسیم کرد

حل عمومی $\mu \nabla^2 u_1 + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla u_1) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$ Elasto-Static.

حل خصوصی $\mu \nabla^2 u_2 + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla u_2) = \rho_0 \partial^2 u_2 / \partial t^2$ Elasto-Dynamic.

$\underline{u} = \nabla \phi + \nabla \times \underline{\psi}$

$\mathrm{curl}(\nabla \phi) = \nabla \times \nabla \phi = 0 \qquad u_i = \varphi_{,i} + \varepsilon_{ijk} \psi_{k,j}$

$\mathrm{div}(\nabla \times \underline{\psi}) = \nabla \cdot \nabla \times \underline{\psi} = \underline{0}$

انتشار امواج در محیط الاستیک

$\mu \varphi_{,ijj} + (\lambda + \mu) \varphi_{,jij} + \mu \varepsilon_{imk} \psi_{k,mjj} + (\lambda + \mu) \varepsilon_{jmk} \psi_{k,mij} =$

$= \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \varphi_{,i}}{\partial t^2} + \varepsilon_{imk} \frac{\partial^2 \psi_{k,m}}{\partial t^2} \right]$

$(\lambda + 2\mu) \varphi_{,ijj} + \mu \varepsilon_{imk} \psi_{k,mjj} - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi_{,i}}{\partial t^2} - \rho_0 \varepsilon_{imk} \frac{\partial^2 \psi_{k,m}}{\partial t^2} = 0$

$\left[(\lambda + 2\mu) \varphi_{,jj} - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right]_{,i} + \varepsilon_{imk} \left[\mu \psi_{k,jj} - \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2}\right]_{,m} = 0$

$\mathcal{L}: \quad (\lambda + 2\mu) \varphi_{,jj} - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

در این صورت امواج طولی غیرچرخشی خواهیم داشت و c_1 برابر است با

$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$

$\mathcal{L}: \quad \mu \psi_{k,jj} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} \quad \text{or} \quad \nabla^2 \underline{\psi} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} \quad , \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$

برای امواج طولی $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = 0$ در نتیجه $\underline{u} = \nabla \phi$ خواهد بود،

انتشار امواج طولی همراه با تغییر حجم خواهد بود و اصطلاحاً Dilatational waves گویند

برای امواج عرضی یا برشی (Shear Waves) $\underline{u} = \nabla \times \underline{\psi}$ داریم، $\mathrm{div}\, \underline{u} = 0$

انتشار امواج برشی با تغییر حجم همراه نیست، این امواج را امواج هم حجم یا اصطلاحاً

Equivoluminal Waves گویند. $c_1 > c_2$

دوایر موهر Mohr's Circles $\mathcal{L}: \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$T = T^T \Rightarrow \underline{T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \underline{0} \\ & \sigma_2 & \\ \underline{0} & & \sigma_3 \end{pmatrix}$ در دستگاه مختصات اصلی T تعریف شده است

اگر σ تنش نرمال، τ تنش برشی بر صفحه‌ای که عمود بر آن بردار یکه $\underline{n}$ است باشد

$\underline{n} = n_i \underline{e}_i \qquad n_i n_i = 1$

$\underline{t}(\underline{n}) = \underline{T}\,\underline{n} = \sigma_1 n_1 \underline{e}_1 + \sigma_2 n_2 \underline{e}_2 + \sigma_3 n_3 \underline{e}_3$

$\sigma = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

$\|\underline{t}\|^2 - \sigma^2 = \tau^2 \Rightarrow \tau^2 + \sigma^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \|\underline{t}\|^2$

$\sigma - \sigma_1 n_1^2 = \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

$\tau^2 + \sigma^2 - \sigma_1^2 n_1^2 = \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad \& \quad 1 - n_1^2 = n_2^2 + n_3^2$

حال می‌خواهیم n_2 ، n_3 را حذف کنیم

$\det \begin{pmatrix} \sigma - \sigma_1 n_1^2 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau^2 + \sigma^2 - \sigma_1^2 n_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 - n_1^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} \sigma-\sigma_1 n_1^2 & \sigma_2-\sigma_3 & \sigma_3 \\ \tau^2+\sigma^2-\sigma_1^2 n_1^2 & \sigma_2^2-\sigma_3^2 & \sigma_3^2 \\ 1-n_1^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sigma-\sigma_1 n_1^2 & 1 & \sigma_3 \\ \tau^2+\sigma^2-\sigma_1^2 n_1^2 & \sigma_2+\sigma_3 & \sigma_3^2 \\ 1-n_1^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-n_1^2)(\sigma_3^2+\sigma_2\sigma_3-\sigma_3^2) + (\sigma_2+\sigma_3)(\sigma-\sigma_1 n_1^2) - (\tau^2+\sigma^2-\sigma_1^2 n_1^2) = 0$$

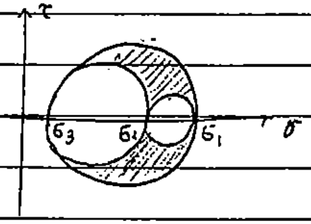
$$\tau^2+\sigma^2-\sigma(\sigma_2+\sigma_3) = \sigma_1^2 n_1^2 - \sigma_1 n_1^2(\sigma_2+\sigma_3) - \sigma_2\sigma_3 + n_1^2\sigma_2\sigma_3$$

$$\Rightarrow \tau^2 + (\sigma-(\sigma_2+\sigma_3)/2)^2 = (\sigma_2+\sigma_3)^2/4 + n_1^2[\sigma_1^2-\sigma_1(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3] - \sigma_2\sigma_3$$

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + n_1^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3) - \sigma_2\sigma_3$$

$$= \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 + n_1^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)$$

شعاع‌های برشی ماکزیمم =
$$\begin{cases} \pm \dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \\ \pm \dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \\ \pm \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \end{cases}$$
می‌نیم



به همین ترتیب با n_2 ، n_3 داریم:

(I) $$\tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right]^2 = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 + n_1^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)$$

(II) $$\tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right]^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + n_3^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)$$

(III) $$\tau^2 + \left[\sigma - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right]^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2 + n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)$$

مسائل الاستیته دوبعدی

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 1/E\,(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_y = 1/E\,(\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) \\ \varepsilon_z = 1/E\,(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \end{cases}$$

اگر : $\sigma_z = 0$ Plane Stress.

اگر : $\varepsilon_z = 0$ Plane Strain

at Plane Stress :
$$\begin{cases} \varepsilon_x = 1/E\,(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = 1/E\,(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases}$$

at Plane Strain :
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \dfrac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right) \end{cases}$$

اگر در معادلات تنش مسطح به جای E قرار دهیم $\frac{E}{1-\nu^2}$ و به جای ν قرار دهیم $\frac{\nu}{1-\nu}$ در اینصورت به معادلات کرنش مسطح می‌رسیم

اصل بقاء انرژی : در فصل بیان اصل بقاء انرژی یا قانون اول ترمودینامیک میدانهای زیر را تعریف می‌کنیم

1. Specific internal Energy

فرض کنید میدان $\varepsilon = \varepsilon(\underline{X}, t)$ بیانگر انرژی داخلی ویژه هر ذره جرم باشد بطوری که انرژی داخلی کل ناحیه $\mathcal{R}$ عبارت خواهد بود از

$$\mathcal{U}(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \rho\varepsilon \, dv$$

2. Rate of Heat Supply

میدان $r = r(\underline{X}, t)$ نرخ تأمین حرارت یا انرژی حرارتی هر واحد جرم که واحد آن انرژی در واحد جرم در واحد زمان است.

3. Flux of Heat Supply

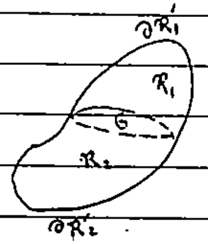
میدان سطحی $-h = -h(\underline{X}, t; \underline{n})$ نرخ تأمین انرژی حرارتی از طریق سطح که واحد آن انرژی هر واحد سطح هر واحد زمان خواهد بود.

در این صورت اصل بقای انرژی یا قانون اول ترمودینامیک، به صورت یک جزء $\mathcal{R}$ از یک محیط پیوسته عبارت است از

$$\frac{dK}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_{\mathcal{R}} \rho r\, dv - \int_{\partial\mathcal{R}} h\, da + R_b + R_c$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{R}} (t_{ij} d_{ij} - \rho\dot{\varepsilon} + \rho r)\, dv - \int_{\partial\mathcal{R}} h\, da = 0$$

چرا که :
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{R}} (t_{ij} d_{ij})\, dv + \frac{dK}{dt} = R_b + R_c$$



دقیقاً مانند بررسی وضعیت تراکشن جزئی، با اعمال اصل بقای انرژی به مجموعه $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ نتیجه می‌گیریم

$$h(-\underline{n}) = -h(\underline{n})$$

و با اعمال اصل بقای انرژی به زبانه‌ی چهاروجهی نتیجه می‌گیریم که h تابع خطی از n است یعنی

$$h = q_i n_i = \underline{q}\cdot\underline{n}$$

$\underline{q} = \underline{q}(\underline{x},t)$ را بردار شار حرارتی گوییم. q_i شار حرارتی است که از سطح با بردار قائم $\underline{e}_i$ وارد این سطح خارج می‌شود. در این صورت اصل بقای انرژی به صورت زیر در می‌آید

$$\int_{\mathcal{R}} (\rho r - \rho\dot{\varepsilon} + t_{mn} d_{mn})\, dv - \int_{\partial\mathcal{R}} q_i n_i\, da = 0$$

$$\int_{\mathcal{R}} (\rho r - \rho\dot{\varepsilon} + t_{mn} d_{mn} - q_{i,i})\, dv = 0$$

با توجه به دلخواه بودن $\mathcal{R}$ و پیوسته بودن آن در یک محیط پیوسته، فرم موضعی اصل بقای انرژی در وضعیت فعلی به صورت زیر در می‌آید

$$-\rho r + \rho\dot{\varepsilon} - t_{mn} d_{mn} + q_{i,i} = 0$$

$$\rho r - \rho\dot{\varepsilon} + \underline{T}:\underline{D} - \operatorname{div}\underline{q} = 0$$

اصل بقای انرژی در وضعیت مرجع :

$$h\, da = h_0\, dA$$

$$h_0 = h_0(\underline{X}, t; \underline{N})$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}} \rho\, \underline{v}\cdot\underline{v}\, dv = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\, \underline{v}\cdot\underline{v}\, dV$$

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_{\mathcal{R}} \rho\dot{\varepsilon}\, dV$$

$$R_b + R_c = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\, \underline{b}\cdot\underline{v}\, dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \underline{P}\cdot\underline{v}\, dA$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\, \dot{v}\, v\, dV + \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\dot{\varepsilon}\, dV = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\, b_i v_i\, dV + \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0\, r\, dV$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{R}_0} P_i v_i\, dA + \int_{\partial\mathcal{R}_0} -h_0\, dA$$

$$P_i = P_{iA} N_A$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\mathcal{R}_0} P_i v_i\, dA = \int_{\partial\mathcal{R}_0} P_{iA} v_i N_A\, dA = \int_{\mathcal{R}_0} (P_{iA} v_i)_{,A}\, dV$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{R}_0} (\rho_0 r - \rho_0\dot{\varepsilon} + P_{iA} v_{i,A})\, dV - \int_{\partial\mathcal{R}_0} h_0\, dA = 0$$

مجدداً مانند قبل،

$$h_0(-\underline{N}) = -h_0(\underline{N})$$

$$h_0 = Q_A N_A = \underline{Q}\cdot\underline{N}$$

در نتیجه فرم موضعی اصل بقای انرژی در وضعیت مرجع به صورت زیر در می‌آید

$$\rho_0 r - \rho_0\dot{\varepsilon} + P_{iA} v_{i,A} - Q_{A,A} = 0$$

$$\rho_0 r - \rho_0\dot{\varepsilon} + \underline{P}:\dot{\underline{F}} - \operatorname{Div}\underline{Q} = 0$$

توجیهی برای تحول آنتروپی

فرض کنید شار حرارتی در سیال نداشته باشیم $\underline{q}=\underline{0}$ ، در این صورت معادله انرژی عبارت است از: و همچنین برای سیال ایده‌آل $t_{ij}=-p\delta_{ij}$

$$\rho r-\rho\dot{\varepsilon}+t_{ij}d_{ij}=0$$

$$\rho r-\rho\dot{\varepsilon}-p d_{ii}=0 \qquad \dot{\rho}+\rho\,\mathrm{div}\,\underline{v}=\dot{\rho}+\rho d_{ii}=0$$

$$\rho r-\rho\dot{\varepsilon}-p(-\dot{\rho}/\rho)=0 \qquad r-\dot{\varepsilon}+p/\rho^2\,\dot{\rho}=0$$

$v=1/\rho$ Specific Volume

$$\therefore\ r=\dot{\varepsilon}+p\dot{v}$$

از طرفی برای گاز ایده‌آل داریم $p=\bar{R}\rho\theta$ ، $\bar{R}=R/M$ که R ثابت جهانی گازها و برابر است با $R=8.32\,J/_{kmol}$ ؛ همچنین $\varepsilon=\varepsilon(\theta)$ ؛ در این صورت داریم:

$$r=\frac{d\varepsilon}{d\theta}\dot{\theta}+\frac{\bar{R}\theta}{v}\dot{v}$$

در رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که $\eta=\eta(v,\theta)$ وجود دارد به طوری که $\dot{\eta}=r/\theta$

$\partial\eta/\partial\theta=1/\theta\ d\varepsilon/d\theta \qquad \partial\eta/\partial v=\bar{R}/v$ رابطه ماکسول: $\frac{\partial s}{\partial T}=\frac{C_v}{T}$

اگر $\eta=\eta(\rho,\theta)$ در این صورت $\partial\eta/\partial\rho=\partial\eta/\partial v\ \partial v/\partial\rho=-1/\rho^2\,\partial\eta/\partial v=-\bar{R}/\rho$

فرآیند ترمودینامیکی Thermodynamic Process. (Coleman & Noll, 1963)

منظور از فرآیند ترمودینامیکی مجموع ۸ تابع زیر است که در زمان t به ذرات یک جسم نسبت داده شده است و در معادلات تعادل مومنتم خطی و اصل بقای انرژی صدق می‌کنند

1. $\underline{x}=\underline{\chi}(\underline{X},t)$
2. $\underline{b}=\underline{b}(\underline{x},t)$
3. $\underline{T}=\underline{T}(\underline{x},t)$ $\qquad \frac{d}{dt}\int_R \rho\underline{v}\,dv=\int_R \rho\underline{b}\,dv+\int_{\partial R}\underline{T}\,\underline{n}\,da$
4. $\varepsilon=\varepsilon(\underline{x},t)$
5. $r=r(\underline{x},t)$ $\qquad \frac{d}{dt}\int_R(\rho)(\varepsilon+1/2\,\underline{v}\cdot\underline{v})\,dv=$
6. $h=h(\underline{x},t)$
7. $\eta=\eta(\underline{x},t)$ $\qquad \int_R \rho(\underline{b}\cdot\underline{v}+r)\,dv+\int_{\partial R}(\underline{T}\,\underline{n}\cdot\underline{v}-h)\,da$
8. $\theta=\theta(\underline{x},t)$

رابطه بین بردارهای $\underline{q}$ و $\underline{Q}$:

$$h\,da=h_0\,dA$$

$$q_i n_i\,da=h_0\,Q_A N_A\,dA$$

$$n_i\,da=J\,X_{M,i}N_M\,dA \Rightarrow J q_i X_{M,i}N_M\,dA=Q_M N_M\,dA$$

$$Q_M=J q_i X_{M,i}$$

$$\underline{Q}=J\underline{F}^{-1}\underline{q} \quad \text{or} \quad \underline{q}=\frac{1}{J}\underline{F}\underline{Q}$$

$$P_{iA}v_{i,A}=x_{i,M}S_{MA}v_{i,A}=S_{MA}x_{i,M}v_{i,j}x_{j,A}$$

$$=S_{MA}x_{i,M}(d_{ij}+W_{ij})x_{j,A}$$

$$=S_{MA}x_{i,M}d_{ij}x_{j,A}$$

$$\dot{\underline{C}}=2\underline{F}^T\underline{D}\underline{F} \qquad \dot{\underline{E}}=\underline{F}^T\underline{D}\underline{F} \Rightarrow P_{iA}v_{i,A}=S_{AB}\dot{E}_{AB}=\underline{S}:\dot{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \rho_0 r-\rho_0\dot{\varepsilon}+\underline{S}:\dot{\underline{E}}-\mathrm{Div}\,\underline{Q}=0$$

Clausius - Duhem, Inequality قانون دوم ترمودینامیک

فرض کنید میدان $\theta=\theta(\underline{x},t)>0$ میدان دمای مطلق، میدان $\eta=\eta(\underline{x},t)$ میدان آنتروپی در واحد جرم (آنتروپی ویژه) Specific Antropy باشد. در این صورت

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\eta\,dv \geq \int_R \rho\frac{r}{\theta}\,dv-\int_{\partial R}\frac{h}{\theta}\,da$$

$$\int_R(\rho\dot{\eta}-\rho r/\theta+(q_i/\theta)_{,i})\,dv\geq 0$$

با توجه به دلخواه بودن R و پیوستگی تابع زیر انتگرال داریم:

$$\therefore\ \rho\dot{\eta}-\rho r/\theta+(q_i/\theta)_{,i}\geq 0 \qquad g_i\triangleq\theta_{,i}$$

$$\therefore\ \rho\theta\dot{\eta}-\rho r+q_{i,i}-1/\theta\,g_i q_i\geq 0$$

$$\rho\theta\dot{\eta}-\rho r+\mathrm{div}\,\underline{q}-1/\theta\,\underline{q}\cdot\underline{g}\geq 0$$

حال خیال ما برای مجموعهٔ ۴ تابع $\{ \mathbf{T} ; \varepsilon ; \mathbf{q} ; \eta \ (or\ \theta) \}$ برحسب مجموعهٔ $\{ \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t) ; \theta \ (or\ \eta) \}$ معادلهٔ مشخصه داشته باشیم در این صورت فرایند ترمودینامیکی را جایز گوییم، و مجموعهٔ $\{ \mathbf{b}, r \}$ به قسمی تعیین می‌شوند که معادلات بقاء و ممنتم خطی و اصل بقای انرژی برقرار باشد.

جسم ترموالاستیک

در مورد یک جسم ترموالاستیک داریم: $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \eta) \quad \theta = \hat{\theta}(\mathbf{F}, \eta)$

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \eta) \quad \mathbf{g} = \nabla\theta \quad , \ \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \eta, \mathbf{g})$$

نامساوی کلازیوس دوهم $\quad \rho\theta\dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}\mathbf{q} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$

اصل بقای انرژی $\quad \rho r - \rho\dot{\varepsilon} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{T}:\mathbf{L} = 0$

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \mathbf{T}:\mathbf{L} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{F}}\dot{\mathbf{F}} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\dot{\eta} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T:\mathbf{L} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\dot{\eta}$$

$$\rho\left(\theta - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}\right)\dot{\eta} + \left(\mathbf{T} - \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T\right):\mathbf{L} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$$

$$\therefore \ \hat{\theta} = \frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\eta} \ ; \ \hat{\mathbf{T}} = \rho\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{F}}\mathbf{F}^T \ ; \ \mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \leq 0$$

حال عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی را اعمال می‌کنیم

$$\eta^+ = \eta \ , \ \theta^+ = \theta \ , \ h^+ = h$$

$$h^+ = \mathbf{q}^+\cdot\mathbf{n}^+ = \mathbf{q}^+\cdot\mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{q}^{+T}\mathbf{Q} = \mathbf{q}^T$$

$$\therefore \ \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{q}^+ \Rightarrow \mathbf{q}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{q}$$

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \eta)$$

$$\varepsilon^+ = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}^+, \eta^+) = \varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \eta)$$

$$\therefore \ \hat{\varepsilon}(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \eta) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \eta)$$

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon}(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}, \eta) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}, \eta) \quad \therefore \ \varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{C}, \eta) = \bar{\varepsilon}(\mathbf{E}, \eta)$$

$$\theta = \frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\eta} = \bar{\theta}(\mathbf{C}, \eta)$$

$$t_{ij} = \hat{t}_{ij} = \rho\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial F_{iA}}F_{jA} = \rho\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial C_{MN}}\frac{\partial C_{MN}}{\partial x_{i,A}}x_{j,A}$$

$$= \rho\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial C_{MN}}\left(\delta_{im}\delta_{MA}x_{m,N} + \delta_{im}\delta_{NA}x_{m,M}\right)x_{j,A}$$

$$= \rho\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial C_{MN}}\left(x_{i,N}x_{j,M} + x_{i,M}x_{j,N}\right)$$

$$= 2\rho\, x_{i,M}\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial C_{MN}}x_{j,N} \quad or \quad \mathbf{T} = 2\rho\mathbf{F}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^T$$

$$\therefore \ \mathbf{T} = \rho\mathbf{F}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{E}}\mathbf{F}^T$$

و بطور خلاصه داریم:

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{C}, \eta) \ ; \ \theta = \hat{\theta}(\mathbf{C}, \eta) = \frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\eta}$$

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g})$$

$$\mathbf{T} = \rho\mathbf{F}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{E}}\mathbf{F}^T \ , \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \leq 0$$

حال اگر به جای η ، θ در معادلات ترمو را هم در این صورت از نامساوی کلازیوس - دوهم برحسب انرژی آزاد هلمهولتز استفاده می‌کنیم

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}\mathbf{q} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$$

$$\rho r - \rho\dot{\varepsilon} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \mathbf{T}:\mathbf{D} = 0$$

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \mathbf{T}:\mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0 \qquad \psi : \ \varepsilon = \psi + \theta\eta$$

$\therefore \quad \rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \mathbf{T}:\mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$

$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \mathbf{T}:\mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$

$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}) \qquad \eta = \hat{\eta}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g})$

$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g}) \qquad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{C}, \theta, \mathbf{g})$

$\dot{\psi} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{C}}\dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}}$

$\Rightarrow \quad -\rho\left(\hat{\eta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} - \rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{g}}\dot{\mathbf{g}} + \left(\hat{\mathbf{T}} - 2\rho\mathbf{F}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^T\right):\mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$

$\mathcal{L}: \quad \dot{\mathbf{g}} = 0, \ \mathbf{D} = 0, \ \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \hat{\psi}(\mathbf{C}, \theta)$

$\Rightarrow \quad \hat{\eta} = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \hat{\mathbf{T}} = 2\rho\mathbf{F}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{C}}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \leq 0$

تئوری سیال لزج خطی

$\psi = \hat{\psi}(\rho, \theta, d_{ij}, g_i) \qquad t_{ij} = \hat{t}_{ij}(\rho, \theta, d_{ij}, g_i)$

$\eta = \hat{\eta}(\rho, \theta, d_{ij}, g_i) \qquad q_i = \hat{q}_i(\rho, \theta, d_{ij}, g_i)$

$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \mathbf{T}:\mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geq 0$

$\dot{\psi} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho}\dot{\rho} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}}\dot{d}_{ij} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i \qquad \dot{\rho} = -\rho d_{ii}$

$-\rho\left[-\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho}\rho d_{ii} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}}\dot{d}_{ij} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i + \hat{\eta}\dot{\theta}\right]$

$+ \hat{t}_{ij}d_{ij} - \frac{1}{\theta}\hat{q}_i g_i \geq 0$

$-\rho\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta} + \hat{\eta}\right)\dot{\theta} - \rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}}\dot{d}_{ij} - \rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i + \left(\hat{t}_{ij} + \rho^2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho}\delta_{ij}\right)d_{ij} - \frac{1}{\theta}\hat{q}_i g_i \geq 0$

$\mathcal{L}: \quad \dot{g}_i = \dot{d}_{ij} = 0$

$-\rho\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta} + \hat{\eta}\right)\dot{\theta} + \left(\hat{t}_{ij} + \rho^2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho}\delta_{ij}\right)d_{ij} - \frac{1}{\theta}\hat{q}_i g_i \geq 0$

$\Rightarrow \quad -\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}}\dot{d}_{ij} - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial g_i}\dot{g}_i \geq 0$

$\mathcal{L}: \quad \dot{g}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -\rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}}\dot{d}_{ij} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial d_{ij}} = 0$

$-\rho\frac{\partial\psi}{\partial g_i}\dot{g}_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial g_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \hat{\psi}(\rho, \theta)$

$\mathcal{L}: \quad \dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{t}_{ij} + \rho^2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\rho}\delta_{ij}\right)d_{ij} - \frac{1}{\theta}\hat{q}_i g_i \geq 0$

$\Rightarrow \quad \eta = \hat{\eta}(\rho, \theta) = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}$

در اینجا نمی‌توان دیگر g_i یا d_{ij} را صفر در نظر گرفت، چون ضرایب مستقل نیستند، برخلاف دو مورد بالا. پس در اینجا نمی‌توان نتیجه گرفت که تانسور تنش از گرادیان دما مستقل است.

تئوری سیال لزج خطی:

$\hat{t}_{ij} = \bar{A}_{ij}(\rho, \theta) + \bar{A}_{ijk}(\rho, \theta)g_k + \bar{A}_{ijkl}(\rho, \theta)d_{kl}$

$q_i = \hat{a}_i(\rho, \theta) + \hat{a}_{ij}(\rho, \theta)g_j + \hat{a}_{ijk}(\rho, \theta)d_{jk}$

- تقارن‌های مجهولات عبارتند از:

$A_{ij} = \bar{A}_{ji}, \quad \bar{A}_{ijk} = \bar{A}_{jik}, \quad \bar{A}_{ijkl} = \bar{A}_{jikl} = \bar{A}_{ijlk}$

$\hat{a}_{ijk} = \hat{a}_{ikj}$

حال اصل عدم تغییر نسبت به حرکت صلب المانی را اعمال می‌کنیم

$t^+_{ij} = \hat t_{ij}(\rho^+, \theta^+, d^+_{ij}, g^+_i)$ $\qquad \rho^+ = \rho \;,\; \theta^+ = \theta$

$q^+_i = q^+_i(\rho^+, \theta^+, d^+_{ij}, g^+_i)$ $\qquad d^+_{ij} = Q_{im}Q_{jn}d_{mn}$

$g^+_i = Q_{ij}g_j$

$$\begin{cases} g^+_i = \dfrac{\partial \theta^+}{\partial x^+_i} = \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial x^+_i} = Q_{ij}g_j \\ t^+_{ij} = Q_{im}Q_{jn}t_{mn} \;,\; q^+_i = Q_{ij}q_j \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow \bar A_{ij} + \bar A_{ijk}g^+_k + \bar A_{ijkl}d^+_{kl} = Q_{im}Q_{jn}[\bar A_{mn} + \bar A_{mnk}g_k + \bar A_{mnkl}d_{kl}]$

$(**) \Rightarrow \hat a_i + \hat a_{ij}g^+_j + \hat a_{ijk}d^+_{jk} = Q_{ij}[\hat a_j + \hat a_{jk}g_k + \hat a_{jkl}d_{kl}]$

روابط فوق بایستی به ازای هر $\underline{g}$، $\underline{D}$ و هر Q متعامد برقرار باشند یعنی برای هر دوران. در اینجا $\bar A_{ij}$ توابعی از ρ، θ هستند و دیگر مستقل از $\underline{D}$، $\underline{g}$ می‌باشند.

اگر: $g_k = d_{kl} = 0 \Rightarrow \bar A_{ij} = Q_{im}Q_{jn}\bar A_{mn}$

با قرار دادن رابطه فوق در رابطه (*) و $d_{ij} = 0$، نتیجه می‌گیریم:

$\bar A_{ijk}Q_{kr}g_r = Q_{im}Q_{jn}A_{mnr}g_k \qquad \forall g_k$

$(\bar A_{ijk}Q_{kr} = Q_{im}Q_{jn}\bar A_{mnr}) \Rightarrow \bar A_{ijk} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kr}\bar A_{mnr}$

به همین ترتیب در مورد بقیه تانسورها داریم:

$\bar A_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lr}\bar A_{mnpr}$

$\hat a_i = Q_{ij}\hat a_j \qquad \hat a_{ij} = Q_{im}Q_{jn}\hat a_{mn}$

$\hat a_{ijk} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}\hat a_{mnp}$

در نتیجه همه تانسورها بایستی ایزوتروپیک باشند

$\bar A_{ij} = P(\rho,\theta)\delta_{ij}$

$\bar A_{ijk} = \bar A_{jik} = 0$ عدم تابعیت نسبت به گردان‌ها

$\bar A_{ijkl} = \lambda(\rho,\theta)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\rho,\theta)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

$\therefore \hat a_i = 0 \;,\; \hat a_{ij} = -K(\rho,\theta)\delta_{ij} \;,\; \hat a_{ijk} = 0$

$\hat t_{ij} = -P(\rho,\theta)\delta_{ij} + \lambda(\rho,\theta)d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\rho,\theta)d_{ij}$

$\hat q_i = -K(\rho,\theta)g_i \qquad (\underline{q} = -K\nabla\theta)$

$P(\rho,\theta)$. Thermodynamic Pressure.

$\lambda(\rho,\theta)$, $\mu(\rho,\theta)$: Viscosity Coefficientes

$K(\rho,\theta)$ Thermal Conductivity.

حال نتایج فوق را در نامساوی کلازیوس - دوهم قرار می‌دهیم:

$(t_{ij} + \rho^2\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho}\delta_{ij})d_{ij} - \frac{1}{\theta}\hat q_i g_i \geq 0$

$(-P\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \rho^2\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho}\delta_{ij})d_{ij} + \frac{K}{\theta}g_ig_i \geq 0$

$(\rho\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho} - P)d_{ii} + \lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} + \frac{K}{\theta}g_ig_i \geq 0$

$(\rho^2\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho} - P)d_{ii} + \lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} \geq 0$

d_{ij} را به αd_{ij} بدل کرده و نتیجه را بر α تقسیم کرده و $\alpha \longrightarrow 0$ در نتیجه:

$(\rho^2\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho} - P)d_{ii} \geq 0 \Rightarrow P = \rho^2\frac{\partial\hat\psi}{\partial\rho}$

$\lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} \geq 0 \qquad \frac{K}{\theta}g_ig_i \geq 0 \Rightarrow K \geq 0$

هر تانسور متقارن را می‌توان به دو بخش کروی و انحرافی تقسیم کرد

$d_{ij} = \frac13 d_{mm}\delta_{ij} + d'_{ij}$

$\lambda(d_{kk})^2 + 2\mu(\frac13 d_{mm}\delta_{ij} + d'_{ij})(\frac13 d_{kk}\delta_{ij} + d'_{ij}) \geq 0$

$(\lambda + \frac23\mu)(d_{kk})^2 + 2\mu d'_{ij}d'_{ij} \geq 0$

$\lambda + \frac23\mu \geq 0$ چون روابط ضرایب مثبت هستند، در نتیجه

$\mu \geq 0$ $\qquad$ اگر: $\lambda = -\frac23\mu$ $\qquad$ فرض استوکس:

$t_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$

$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}\right) = \rho b_i - (p\delta_{ij})_{,j} + (\lambda d_{kk}\delta_{ij})_{,j} + (2\mu d_{ij})_{,j}$

اگر λ, μ را ثابت فرض کنیم

$\rho b_i - p_{,i} + \lambda (d_{kk})_{,i} + 2\mu d_{ij,j}$

$d_{ij} = 1/2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad d_{mm} = v_{m,m}$

$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{i,j}\right) = \rho b_i - p_{,i} + \lambda v_{k,ki} + \mu(v_{i,jj} + v_{j,ij})$

$= \rho b_i - p_{,i} + (\lambda + \mu) v_{k,ki} + \mu v_{i,jj}$

$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{b} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + (\lambda' + \nu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{v}) + \nu\nabla^2\underline{v}$

$\lambda' = \lambda/\rho \quad , \quad \nu = \mu/\rho$

برای سیال تراکم ناپذیر $\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0$ داریم:

$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{b} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla} p + \nu\nabla^2\underline{v}$

$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$

$p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \; ; \; \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \; ; \; \underline{q} = -k\underline{\nabla}\theta$

معادله انرژی:

$$\begin{cases} \rho r - \rho\dot{\varepsilon} + t_{ij}d_{ij} - \operatorname{div}\underline{q} = 0 \\ \rho r - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \dot{\eta}\theta) + t_{ij}d_{ij} - q_{i,i} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{ij}d_{ij} = -p\,d_{kk} + \lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} \\ \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\dot{\theta} \end{cases}$$

$\rho r - \rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\dot{\rho} + \dot{\eta}\theta\right) - p\,d_{kk} + \lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} + (k\theta_{,i})_{,i}$

$\dot{\rho} + \rho d_{kk} = 0$

$p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho}$

$\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\dot{\rho} + p\,d_{kk} = 0$

$\rho r - \rho\dot{\eta}\theta + \lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} + k\nabla^2\theta = 0$ با فرض k ثابت

برای سیال تراکم پذیر $\rho r - \rho\dot{\eta}\theta + 2\mu d_{ij}d_{ij} + k\nabla^2\theta = 0$

برای سیال تراکم ناپذیر $d_{ii} = 0$ ، با فرض $\varepsilon = c\theta$ ، با فرض k ثابت معادله انرژی را

می‌توان بصورت زیر نوشت $\rho r - \rho c\dot{\theta} + 2\mu d_{ij}d_{ij} + k\nabla^2\theta = 0$

$\rho c\dot{\theta} = \rho r + k\nabla^2\theta + 2\mu\, tr\,\underline{D}^2$

در غیاب منبع حرارتی و در حالتی که $\underline{D} = \underline{0}$ باشد ، معادله انرژی بصورت زیر در می‌آید

$\rho c\dot{\theta} = k\nabla^2\theta$

$a = k/\rho c \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \alpha\nabla^2\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha\nabla^2\theta$

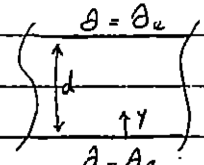
$\nabla^2\theta = 0$ Steady State.

مثال : توزیع دما برای حالتی که صفحه‌ها ثابت هستند (الف)

اگر صفحه بالایی با سرعت ثابت U به موازات خودش حرکت

کند ، در این صورت توزیع دما را پیدا کنید؟ (ب)

$\theta = \theta_u$



$\theta = \theta_l$

الف) توزیع دما یک توزیع خطی است

$\frac{d^2\theta}{dy^2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\theta_u - \theta_l}{d}y + \theta_l$

ب) $v_1 = cy \quad c = \frac{U}{d} \quad v_2 = v_3 = 0 \quad d_{12} = d_{21} = \frac{c}{2}$

$k\nabla^2\theta + 2\mu\, tr\,\underline{D}^2 = 0 \Rightarrow k\frac{d^2\theta}{dy^2} + 4\mu(d_{12})^2 = 0$

$\Rightarrow k\frac{d^2\theta}{dy^2} + \mu c^2 = 0 \qquad k\frac{d\theta}{dy} + \mu c^2 y = A \Rightarrow k\theta + \mu c^2\frac{y^2}{2} = Ay + B$

$y = 0 \;,\; \theta = \theta_l \Rightarrow B = k\theta_l$

$y = d \;,\; \theta = \theta_u \Rightarrow k\theta_u + \mu c^2 d^2/2 = Ad + k\theta_l$

$\Rightarrow A = \frac{k}{d}(\theta_u - \theta_l) + \mu c^2 d/2 \Rightarrow \theta = -\mu c^2\frac{y^2}{2k} + \left[\frac{\theta_u - \theta_l}{d} + \frac{\mu c^2 d}{2k}\right]y$

توزیع دما بصورت سهمی است و بستگی به استهلاک ناشی از نیروهای ویسکوز در داخل جریان دارد. ن

اتلاف انرژی در سیال لزج خطی

Stress Power

$$P = t_{ij} d_{ij} = -p\, d_{kk} + \lambda (d_{kk})^2 + 2\mu\, d_{ij} d_{ij}$$

برای سیال تراکم ناپذیر داریم:

$$P = t_{ij} d_{ij} = 2\mu\, d_{ij} d_{ij}$$

دلیل آنکه یک انباشت انرژی را می‌گیرد و در واقع این بخش از انرژی تابع برگشت پذیر نیست.
برای سیال تراکم پذیر جزء $-p\,d_{kk}$: انرژی داخلی دارای اندرکنش است، می‌توان آنرا به شکل زیر نوشت:

$$\frac{dU}{dt} = \int_R p\, d_{kk}\, dv$$

در حقیقت این قسمت قابل بازیافت است یعنی این انرژی بصورت انرژی داخلی محفوظ است و به ما برمی‌گردد. در حقیقت اتلاف انرژی ناشی از لزجت است، اگر سیال دارای لزجت نباشد، سیال مثل جسم الاستیک عمل می‌کند و اتلاف انرژی نداریم: اتلاف انرژی بر واحد حجم در واحد زمان

$$\Phi = \lambda (tr\, D)^2 + 2\mu\, tr\, D^2$$

$$I_1 = tr\, D \quad , \quad I_2 = \tfrac{1}{2}\left[(tr\, D)^2 - tr\, D^2\right]$$

$$\Phi_{int} = -4\mu J_2 \qquad J_1 = tr\, D = 0$$: در سیال تراکم ناپذیر

$$\Phi_{cmp} = \lambda J_1^2 + 2\mu\left[J_1^2 - 2J_2\right]$$

$$\Phi = (\lambda + 2\mu) J_1^2 - 4\mu J_2$$

معادله انرژی برای سیال تراکم ناپذیر

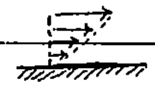
$$\rho c \dot\theta = \rho r + K\nabla^2\theta + \Phi_{int}$$

$$= \rho r + K\nabla^2\theta - 4\mu J_2$$

مثال: اگر آب بین دو صفحه تخت (جریان برشی ساده) با نرخ $1\ sec^{-1}$ قرار گیرد، میزان اتلاف انرژی را حساب کنید

$\mu = 0.598$ MPa-Sec

$\Phi = 2\mu\, tr\, D^2 \qquad \nu = kg$



$v_{1,2} = 1 \Rightarrow d_{12} = 1/2 \qquad K = 1$

$$\Phi_{int} = 2\mu\, tr\, D^2 = 4\mu\, d_{12}^2 = \mu = 0.598 \times 10^{-3}\ g/sec\text{-}m^3$$

ترموالاستیسیته خطی « Linear Thermoelasticity »

در این حالت تغییرات دمای کم است، کرنش‌ها بسیار کوچک هستند

$$t_{ij} = \lambda e_{mm}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \rightarrow e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[t_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} t_{mm}\delta_{ij}\right]$$

اگر جسم الاستیک در دمای θ_0 عاری از هرگونه تنش و کرنش باشد در اینصورت اگر α ضریب انبساط حرارتی باشد، کرنش حاصل از تغییر دما:

$$e_{ij} = \alpha(\theta - \theta_0)\delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[t_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} t_{mm}\delta_{ij}\right] + \alpha(\theta-\theta_0)\delta_{ij}$$

$$e_{mm} = \frac{t_{mm}}{3\lambda+2\mu} + 3\alpha(\theta-\theta_0)$$

$$t_{ij} = 2\mu\left[e_{ij} - \alpha(\theta-\theta_0)\delta_{ij}\right] + \lambda\delta_{ij}\left[e_{mm} - 3\alpha(\theta-\theta_0)\right]$$

$$t_{ij} = \left[\lambda e_{mm} - \beta(\theta-\theta_0)\right]\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad ; \quad \beta = (3\lambda+2\mu)\alpha = 3\kappa\alpha$$

$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ Bulk Module of Elasticity $\qquad \beta = \frac{E}{1-2\nu}\alpha$

در ترموالاستیسیته خطی، با توجه به $t_{ij} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial e_{ij}}$ ، $\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ ، $\psi = \psi(e_{ij},\theta)$ رابطه t_{ij} را می‌توان نوشت:

$$\rho_0\psi = \mu e_{ij}e_{ij} + (\lambda/2)(e_{mm})^2 - \beta(\theta-\theta_0)e_{mm} + f(\theta)$$

با توجه به کوچک بودن $(\theta-\theta_0)$ ، $f(\theta)$ را حول θ_0 بسط داده و از اولین جمله چون ترم خطی $(\theta-\theta_0)$ وجود دارد، لذا از نوشتن این ترم برای $f(\theta)$ خودداری می‌کنیم

$$f(\theta) \approx A(\theta-\theta_0)^2$$

$$\rho_0\psi = \mu e_{ij}e_{ij} + \lambda/2\,(e_{mm})^2 - \beta(\theta-\theta_0)e_{mm} + A(\theta-\theta_0)^2$$

$$\rho_0\eta = -\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho_0\psi) = \beta e_{mm} - 2A(\theta-\theta_0)$$

معادله انرژی در ترموالاستیسیته خطی

$$d_{ij} = \dot e_{ij} = 1/2(\dot u_{i,j} + \dot u_{j,i}) = 1/2(v_{i,j} + v_{j,i})$$

$$\rho r - \rho\dot\varepsilon + t_{ij}\dot e_{ij} - div\, q = 0$$

$$\rho_0 r - \rho_0(\dot\psi + \dot\eta\theta + \eta\dot\theta) + t_{ij}\dot e_{ij} - div\, q = 0$$

انتشار امواج در ترموالاستیسیته: $\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu) u_{j,ij} + \rho_0 b_i = \rho_0 \ddot{u}_i + \beta\theta_{,i}$

$\rho_0 r - \rho_0 c\dot{\theta} - \beta\theta_0 \dot{e}_{ii} + K\nabla^2\theta = 0$

$\mu\nabla^2 \underline{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\underline{u}) + \rho_0 \underline{b} = \rho_0\ddot{\underline{u}} + \beta\nabla\theta$

$\rho_0 r - \rho_0 c\dot{\theta} - \beta\theta_0\, \mathrm{div}\,\dot{\underline{u}} + K\nabla^2\theta = 0$

در غیاب نیروی بدنی و منبع حرارتی $\underline{b} = r = 0$ داریم:

$\mu\nabla^2 \underline{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\underline{u}) = \rho_0\ddot{\underline{u}} + \beta\nabla\theta$

$K\nabla^2\theta - \rho_0 c\dot{\theta} = \beta\theta_0\, \mathrm{div}\,\dot{\underline{u}}$ $\qquad \underline{\Omega} \triangleq \nabla\times\underline{u}$

با اعمال عملگر $\nabla\times$ بر معادله اول داریم: $\nabla^2\underline{\Omega} = \frac{1}{c_2^2}\underline{\Omega}_{tt} \qquad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$

انتشار امواج عرضی همراه با تغییر دما نیست.

اگر $e \triangleq \nabla\cdot\underline{u}$، با اعمال عملگر $\nabla\cdot$ بر معادلات اول و دوم داریم:

$\mu\nabla^2 e + (\lambda+\mu)\nabla^2 e = \rho_0 e_{tt} + \beta\nabla^2\theta$

$\nabla^2 e = \frac{1}{c_1^2} e_{tt} + m\nabla^2\theta$

به طوری که

$m = \frac{\beta}{\lambda+2\mu} \qquad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e = m\nabla^2\theta \qquad (1)$

حال در معادله دوم داریم:

$K\nabla^2\theta - \rho_0 c\dot{\theta} = \beta\theta_0 \frac{\partial e}{\partial t}$

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta = \gamma\frac{\partial e}{\partial t} \qquad (2)$

$\gamma = \frac{\beta\theta_0}{K}, \quad \alpha = \frac{K}{\rho_0 c}, \quad \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$

حال بین معادلات (1) و (2)، θ را حذف می‌کنیم:

$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{1}{m}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)e = \gamma\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 e$

$\Rightarrow \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m\gamma\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\right] e = 0$

در الاستیسیته خطی داشتیم: $\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) e = 0$

$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial e_{ij}}\dot{e}_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta}$

$\rho_0 r - \rho_0\dot{\eta}\theta - \mathrm{div}\,\underline{q} = 0$

$\rho_0\dot{\eta} = \beta\dot{e}_{mm} - 2A\dot{\theta} \quad \Rightarrow \rho_0 r - \theta(\beta\dot{e}_{mm} - 2A\dot{\theta}) - \mathrm{div}\,\underline{q} = 0$

در این صورت تقریبی:

$\rho_0 r - \beta\theta_0\dot{e}_{mm} + 2A\theta_0\dot{\theta} - \mathrm{div}\,\underline{q} = 0 \qquad \underline{q} = -K\nabla\theta$

$\rho_0 r - \rho_0\dot{\varepsilon} + t_{ij}\dot{e}_{ij} + K\nabla^2\theta = 0$

می‌خواهیم ثابت A را به دست آوریم. اگر $e_{ij} = 0$ باشد، یعنی در جسم الاستیک تغییر شکل رخ ندهد و $\varepsilon = c\theta$، در این صورت معادلهٔ انرژی به شکل زیر در می‌آید:

$\rho_0 r - \rho_0 c\dot{\theta} + K\nabla^2\theta = 0 \quad , \quad \rho_0 r + 2A\theta_0\dot{\theta} + K\nabla^2\theta = 0$

$\Rightarrow 2A\theta_0\dot{\theta} = -\rho_0 c \Rightarrow A = -\frac{\rho_0 c}{2\theta_0}$

لذا معادلهٔ انرژی در ترموالاستیسیته خطی:

$\rho_0 r - \rho_0 c\dot{\theta} - \beta\theta_0\dot{e}_{mm} + K\nabla^2\theta = 0$

$K\nabla^2\theta = \rho_0 c\dot{\theta} - \rho_0 r + \beta\theta_0\dot{e}_{mm} \qquad \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$

$\dot{e}_{mm}$ مثل منبع حرارتی عمل می‌کند. اگر مثبت باشد در جسم حرارت می‌دهیم و اگر منفی باشد از جسم حرارت می‌گیریم یعنی اگر $\dot{e}_{mm} > 0$ جسم گرم می‌شود و اگر $\dot{e}_{mm} < 0$ جسم سرد می‌شود. این پدیده را Gough-Joule Effect می‌نامند. اثر این پدیده را می‌توان با قرار دادن یک کش بین دو لب امتحان کرد. زمانی که کش جمع می‌شود، خود کش گرم می‌شود یعنی از لب ما حرارت می‌گیرد و برعکس.

$t_{ij} = \lambda e_{mm}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \beta(\theta-\theta_0)\delta_{ij}$

$= \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) - \beta(\theta-\theta_0)\delta_{ij}$

$t_{ij,j} + \rho_0 b_i = \rho_0\ddot{u}_i$

$(\lambda+\mu) u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} - \beta\theta_{,i} + \rho_0 b_i = \rho_0\ddot{u}_i$

در ترموالاستیسیته خطی معادلات زیر را باید حل کنیم:

$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\underline{u}) + \mu\nabla^2\underline{u} + \rho_0\underline{b} = \rho_0\ddot{\underline{u}} + \beta\nabla\theta$

$K\nabla^2\theta = \rho_0 c\dot{\theta} + \beta\theta_0\,\mathrm{div}\,\dot{\underline{u}} - \rho_0 r$

استخراج معادلات تعادل ممنتوم خطی و تعادل جرم از معادلهٔ تعادل انرژی و عدم تغییرات حرکت صلب الحاقی:

معادلهٔ تعادل انرژی: $\frac{dk}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv + \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{v}\, da + \int_{\mathcal{R}} \rho r\, dv - \int_{\partial\mathcal{R}} h\, da$

$u = \int_{\mathcal{R}} \rho \epsilon\, dv$ اگر $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{I}$ باشد در واقع یک حرکت انتقالی را تعریف کردیم

در این صورت داریم: $\rho \to \rho \,,\ \underset{\sim}{v} \to \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{c} \,,\ h \to h \,,\ r \to r$

$k = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho\, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} \rho (\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{c}) \cdot (\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{c})\, dv$

$= k + \underset{\sim}{c} \int \rho \underset{\sim}{v}\, dv + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{c}) \int_{\mathcal{R}} \rho\, dv$

$\int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv \longrightarrow \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv + \underset{\sim}{c} \cdot \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b}\, dv$

$\int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{v}\, da \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{v}\, da + \underset{\sim}{c} \cdot \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t}\, da$

با اعمال معادلهٔ انرژی برای حرکت انتقالی و در نظر گرفتن خود معادلهٔ انرژی داریم:

$\underset{\sim}{c} \cdot \frac{d}{dt} \int_{\partial\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{v}\, dv + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{c}) \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} \rho\, dv = \underset{\sim}{c} \cdot \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \underset{\sim}{c} \cdot \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t}\, da$

$\underset{\sim}{c} \cdot \left[\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{v}\, dv - \int_{\mathcal{R}} \rho \underset{\sim}{b}\, dv - \int_{\partial\mathcal{R}} \underset{\sim}{t}\, da \right] + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{c} \cdot \underset{\sim}{c}) \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} \rho\, dv = 0$

اگر $\underset{\sim}{c} \to \alpha \underset{\sim}{c}$ جایگزین کنیم و طرفین را بر α تقسیم کنیم و $\alpha \to 0$ میل دهیم ترم اول صفر در نتیجه ترم دوم صفر می‌شود، پس تعادل ممنتوم خطی و بقای جرم استخراج می‌شود.

حالا موضوع ممنتوم زاویه‌ای:

$\underset{\sim}{x}_{,i} \times \underset{\sim}{t}_i = 0$

$(\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}_i)_{,i} - \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}_{i,i} = 0$

فرم موضعی ممنتوم خطی: $\underset{\sim}{t}_{i,i} + \rho \underset{\sim}{b} = \rho \underset{\sim}{a}$

$\therefore\ (\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}_i)_{,i} - \underset{\sim}{x} \times (\rho \underset{\sim}{a} - \rho \underset{\sim}{b}) = 0$

حال روی حجم کنترل انتگرال می‌گیریم

$\int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{a}\, dv = \int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \int_B (\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}_i)_{,i}\, dv$

$= \int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \int_{\partial B} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}_i n_i\, da$

$= \int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{b}\, dv + \int_{\partial B} \underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{t}\, da$

سمت چپ انتگرال عبارت است از:

$\int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \dot{\underset{\sim}{v}}\, dv = \int_B \left[\frac{d}{dt} (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}) - \underset{\sim}{x} \times \dot{\rho} \underset{\sim}{v} \right] dv$

$= \int_B \left[\frac{d}{dt} (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v})\, v_i - \underset{\sim}{x} \times \dot{\rho} \underset{\sim}{v} \right] dv$

با جایگذاری $\dot{\rho} = -\rho v_{i,i}$ داریم:

$= \frac{d}{dt} \int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}\, dv + \int_B \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v})\, v_i + \underset{\sim}{x} \times (\rho \underset{\sim}{v}\, v_{i,i}) \right] dv$

$= \frac{d}{dt} \int_B \underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}\, dv + \int_B \frac{\partial}{\partial x_i} (\underset{\sim}{x} \times \rho \underset{\sim}{v}\, v_i)\, dv$

$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f v_{i,i} \right) dv = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (f v_i)_{,i} \right) dv$

$= \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial\mathcal{R}} f v_i n_i\, da$

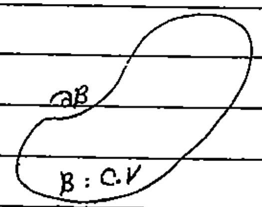
$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}} f(x,t)\, dv = \int_{\partial\mathcal{R}} (\dot{f} + f\, \mathrm{div}\, \underset{\sim}{v})\, dv = \int_{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial\mathcal{R}} f \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, da$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_B f\, dv = \int_B \frac{\partial f}{\partial t}\, dv$

$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho v_{i,i} = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0 \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \underline{v} = 0$

$\int_B \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_B (\rho v_i)_{,i} dv = 0$



$\frac{d}{dt} \int_B \rho dv + \int_{\partial B} \rho v_i n_i da = 0$

$\frac{d}{dt} \int_B f(\underline{x},t) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_B f(\underline{x},t) dv = \int_B \frac{\partial f}{\partial t} dv$

$\frac{d}{dt} \int_R f(\underline{x},t) dv = \int_R (\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v}) dv$

حال اصل تعادل انرژی را در نظر بگیرید:

$\rho r - \rho \dot{\varepsilon} + t_{ki} v_{k,i} - \operatorname{div} \underline{q} = 0$

$\underline{Q} = \underline{I} \ , \ \dot{\underline{Q}} = \underline{\Omega} \neq \underline{0}$ حال حرکت صلبی را در نظر بگیرید که برای آن

$\Omega = -\Omega^T$

$W_{ki} \longrightarrow W_{ki} + \Omega_{ki} \quad \Rightarrow \quad t_{ki} \Omega_{ki} = 0$

$t_{12} \Omega_{12} + t_{21} \Omega_{21} = 0$; اگر $\Omega_{13} = \Omega_{23} = 0$ ولی $\Omega_{12} \neq 0$ در نتیجه

$\therefore \ t_{12} = t_{21}$

$t_{ij} = t_{ji}$ و به همین ترتیب خواهیم داشت

قانون دوم ترمودینامیک با توازن آنتروپی

اگر $\zeta = \zeta(\underline{x}, t)$ نرخ تولید آنتروپی بر واحد جرم در واحد زمان باشد، $s = r/\theta$ نرخ تأمین آنتروپی بر واحد جرم، $K = h/\theta$ شار آنتروپی در واحد سطح بر واحد زمان باشد

در این صورت

$\frac{d}{dt} \int_R \rho \eta \, dv = \int_R \rho (s + \zeta) dv - \int_{\partial R} K da \qquad K = \underline{p} \cdot \underline{n}$

$\int_R \rho \dot{\eta} \, dv = \int_R \rho (s + \zeta) dv - \int_R \operatorname{div} \underline{p} \, dv$

$\rho \dot{\eta} = \rho (s + \zeta) - \operatorname{div} \underline{p}$ لذا فرم موضعی معادله توازن آنتروپی

$\rho \theta \dot{\eta} = \rho r + \rho \theta \zeta - \theta \operatorname{div} \underline{p}$

$\rho r - \rho \dot{\varepsilon} + \underline{T} : \underline{D} - \operatorname{div} \underline{q} = 0$

$\rho \theta \dot{\eta} - \rho \dot{\varepsilon} + \underline{T} : \underline{D} - \operatorname{div}(\theta \underline{p}) + \theta \operatorname{div} \underline{p} - \rho \theta \zeta = 0$

$\rho \theta \dot{\eta} - \rho \dot{\varepsilon} + \underline{T} : \underline{D} - \underline{p} \cdot \underline{g} - \rho \theta \zeta = 0$

$-\rho (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + \underline{T} : \underline{D} - \rho \theta \zeta - \underline{p} \cdot \underline{g} = 0$

$\{ \underline{T}, \psi, \eta, \underline{p}, \zeta \} \ , \ \{ \underline{b}, s \} \ , \ \{ \underline{\chi}, \theta \}$

$\psi = \hat{\psi} - \theta f$ اگر معادلات مشخصه زیر را در نظر بگیریم به طوری که f تابع دلخواه

$\underline{T} = \hat{\underline{T}}$ و $\underline{p} = \hat{\underline{p}}$ از زمان و مکان است.

$\eta = \hat{\eta} + f$ و $\zeta = \zeta + f$ و $\varepsilon = \psi + \eta \theta = \hat{\psi} + \hat{\eta} \theta$

$\varepsilon = (\hat{\psi} - \theta f) + (\hat{\eta} + f) \theta = \hat{\psi} + \hat{\eta} \theta$

$W = \int_{t_1}^{t_2} (R_b + R_c) dt$

$\frac{dK}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = R_b + R_c + Q(R)$

$Q(R) = \int_R \rho r dv - \int_{\partial R} h da \qquad W = \Delta K + \Delta \mathcal{U} - \int_{t_1}^{t_2} Q(R) dt$

$H = \int_{t_1}^{t_2} Q(\mathcal{R})\,dt$ گرمای تأمین شده برای جسم $\mathcal{R}$ در فاصله زمانی $[t_1,t_2]$

$W = \Delta K + \Delta \mathcal{U} - H$

$\Delta K + \Delta \mathcal{U} = \int_{\mathcal{R}} \rho\left(\tfrac{1}{2}\rho\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} + \varepsilon\right) dv \Big|_{t_1}^{t_2}$

$\psi = \hat{\psi}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) = \psi^+$ جسم ترموالاستیک

$= \hat{\psi}(\underset{\sim}{F}^+, \theta^+, \underset{\sim}{g}^+) = \hat{\psi}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{g})$

$= \hat{\psi}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) = \hat{\psi}(\underset{\sim}{U}, \theta, \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g})$ اگر $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{R}^T$

$= \hat{\psi}(\underset{\sim}{U}, \theta, \underset{\sim}{U}^{-1}\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{g})$

$\psi = \tilde{\psi}(\underset{\sim}{C}, \theta, {}_0\underset{\sim}{g}) \qquad {}_0\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{g} \Rightarrow {}_0g_A = \frac{\partial\theta}{\partial X_A} = \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial X_A} = F_{iA}\, g_i$

شرط فوق کافی نیز هست زیرا :

$\underset{\sim}{C}^+ = \underset{\sim}{C}, \quad {}_0\underset{\sim}{g}^+ = {}_0\underset{\sim}{g}$

$\rho(\dot{\hat{\psi}} + \hat{\eta}\dot{\theta}) + \hat{\underset{\sim}{T}} : \underset{\sim}{D} - \rho\theta\hat{\zeta} - \hat{\underset{\sim}{p}}\cdot\underset{\sim}{g} = 0$

$\dot{\hat{\psi}} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\underset{\sim}{C}} : \dot{\underset{\sim}{C}} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\underset{\sim}{g}}\cdot\dot{\underset{\sim}{g}} \qquad \dot{\underset{\sim}{C}} = 2\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{F}$

$\rho\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta} + \hat{\eta}\right)\dot{\theta} + \left(\hat{\underset{\sim}{T}} - 2\rho\underset{\sim}{F}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\underset{\sim}{C}}\underset{\sim}{F}^T\right) : \underset{\sim}{D} - \rho\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial{}_0\underset{\sim}{g}}\cdot{}_0\dot{\underset{\sim}{g}}$

$- \rho\theta\hat{\zeta} - \hat{\underset{\sim}{p}}\cdot\underset{\sim}{g} = 0$

$\rho\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial{}_0\underset{\sim}{g}}\cdot{}_0\dot{\underset{\sim}{g}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial{}_0\underset{\sim}{g}} = 0 \Rightarrow \psi = \tilde{\psi}(\underset{\sim}{C}, \theta)$

$\eta = \tilde{\eta}(\underset{\sim}{C}, \theta) = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}, \quad \hat{\underset{\sim}{T}} = 2\rho\underset{\sim}{F}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\underset{\sim}{C}}\underset{\sim}{F}^T$

$\rho\theta\hat{\zeta} + \hat{\underset{\sim}{p}}\cdot\underset{\sim}{g} = 0 \qquad \hat{\zeta} = -\frac{1}{\rho\theta}\hat{\underset{\sim}{p}}\cdot\underset{\sim}{g}$

نرخ تولید آنتروپی نیز قابل قبول است

$W = \Delta K + \Delta\mathcal{U} - H$

$H = \int_{t_1}^{t_2} Q(\mathcal{R})\,dt$

$Q(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} \rho r\,dv - \int_{\partial\mathcal{R}} h\,da = \int_{\mathcal{R}} (\rho r - \operatorname{div}\underset{\sim}{q})\,dv$

$\rho\dot{\eta} = \rho(s + \zeta) - \operatorname{div}\underset{\sim}{p}$

$\rho\theta\dot{\eta} = \rho r + \rho\theta\zeta - \theta\operatorname{div}\underset{\sim}{p}$

$\rho r - \operatorname{div}\underset{\sim}{q} = \rho r - \operatorname{div}(\theta\underset{\sim}{p}) = \rho r - \theta\operatorname{div}\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{g}$

$= \rho\theta\dot{\eta} - \rho\theta\zeta - \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{g}$

برای جسم الاستیک داریم :

$\rho r - \operatorname{div}\underset{\sim}{q} = \rho\theta\dot{\eta}$

$W = \Delta K + \Delta\mathcal{U} - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{R}} \rho\theta\dot{\eta}\,dv\,dt$

$\Rightarrow W = \int_{\mathcal{R}} \rho\left(\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} + \varepsilon\right)dv\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{R}} \rho\theta\dot{\eta}\,dv\,dt$

$= \int_{\mathcal{R}} \rho\left(\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} + \psi\right)dv\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{R}} \rho\dot{\theta}\eta\,dv\,dt$

مواد اتلاف کننده انرژی

$\mathcal{V} = \{\dot{\underset{\sim}{F}}, \dot{\theta}, \nabla\underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{g}, \dots\}$

$\psi = \psi(\underset{\sim}{F}, \theta, \mathcal{V})$ اگر $\mathcal{V}$ تهی باشد، پاسخ الاستیک داریم آن را با

$\psi' = \psi(\underset{\sim}{F}, \theta, 0)$ ψ' نشان می‌دهیم.

$W = \Delta K + \Delta\mathcal{U} - H \qquad H = \int_{t_1}^{t_2} Q(\mathcal{R})\,dt$

$Q(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} (\rho r - \operatorname{div}\underset{\sim}{q})\,dv$

$\rho\dot{\eta} = \rho(s + \zeta) - \operatorname{div}\underset{\sim}{p}$

$\rho\theta\dot{\eta} = \rho r + \rho\theta\zeta - \theta\operatorname{div}\underset{\sim}{p}$

$\rho r - \operatorname{div}\underset{\sim}{q} = \rho\theta\dot{\eta} - \rho\theta\zeta + \theta\operatorname{div}\underset{\sim}{p} - \operatorname{div}(\theta\underset{\sim}{p}) = \rho\theta\dot{\eta} - \rho\theta\zeta - \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{g}$

$$W = \Delta K + \Delta U + \bar{W} + W_2$$

$$\bar{W} = -\int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\theta\dot{\eta}\, dv\, dt \quad , \quad W_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\omega^*\, dv\, dt$$

$$\omega^* = -\rho\theta(\dot{\eta} - \dot{\eta}') + \rho\theta\varsigma + \underline{q}\cdot\underline{g}$$

اگر فرآیندی را همراه با معکوس آن در نظر بگیریم (یک سیکل کامل) در این صورت پس از طی فرآیند معکوس $\Delta K = \Delta U = 0 \Rightarrow W = -H$

برای جسم الاستیک که اتلاف کننده انرژی نیست $-H = \bar{W}$, $\rho\omega^* = 0$

و چون $\rho\theta\varsigma + \underline{q}\cdot\underline{g} = 0$, $W = \bar{W}$,

قانون دوم ترمودینامیک

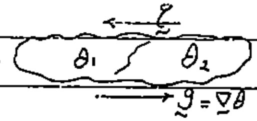
* بیان اول (A) : فرآیندی که نتیجه‌های آن تنها تبدیل گرما از یک منبع دما ثابت به کار است فرآیندی غیرممکن است. Lord. Kelvin (1851).
* بیان دوم (B) : فرآیندی را که در آن کار مکانیکی از طریق اصطکاک به گرما بدل شود بطور کامل قابل معکوس شدن نیست.
* بیان سوم (C) : گرما نمی‌تواند بطور خود بخودی از منبعی با دمای کمتر به منبعی با دمای بیشتر انتقال یابد. Clausius (1850).

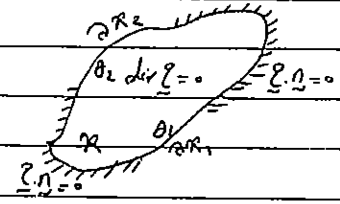
بیان C یعنی بردار شار حرارتی و گرادیان دما در حالت کلی خلاف جهت هم هستند.
برای یک فرآیند معکوس آن $W = \bar{W} + W_2$ ، اگر فرض از W همواره مثبت باشد آن جزء قابل بازیابی شدن نیست. برای جسم اتلاف کننده فرض می‌کنیم که $W_2 > 0$ در نتیجه $\rho\omega^* \geq 0$. در حالت کلی $\rho\omega^* \geq 0$ مطلوب.

محدودیت بر بردار شار حرارتی

در حالت تعادل حرارتی در غیاب منبع حرارتی معادله انرژی $\operatorname{div}\underline{q} = 0$ در حالت یک بعدی. بیان (C) از قانون دوم ترمودینامیک به این معنی است که $\underline{q}\cdot\underline{g} \leq 0$
نامساوی $\underline{q}\cdot\underline{g} \leq 0$ را در هر حالت کلی می‌توان به عنوان محدودیتی بر روی بردار شار حرارتی در نظر گرفت.

$\theta_1 > \theta_2$





$$\int_{\partial R} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da > 0$$

$$\int_{\partial R_1} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da + \int_{\partial R_2} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da = 0$$

$$\int_{\partial R} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da = \int_R \operatorname{div}\underline{q}\, dv = 0$$

$$(\theta_1 - \theta_2)\int_{\partial R_1} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da = -\int_{\partial R} \theta\, \underline{q}\cdot\underline{n}\, da = -\int_R \operatorname{div}(\theta\underline{q})\, dv$$

اگر $\underline{q}\cdot\underline{g} \leq 0$ را به عنوان محدودیت بر روی بردار شار حرارتی بپذیریم به این معنی است که

$$\int_{\partial R} \underline{q}\cdot\underline{n}\, da \geq 0 \Rightarrow \theta_1 > \theta_2$$

پس $\rho\omega^* \geq 0$ (بیان B) ، $\underline{q}\cdot\underline{g} \leq 0$ (بیان C) را به عنوان قانون دوم ترمودینامیک در نظر می‌گیریم.

$$\rho\omega^* = -\rho\theta(\dot{\eta} - \dot{\eta}') + \rho\theta\varsigma + \underline{q}\cdot\underline{g} \geq 0$$

$$\rho\dot{\eta} = \rho(s + \varsigma) - \operatorname{div}\underline{p}$$

$$\rho\theta\dot{\eta} = \rho r + \rho\theta\varsigma - \theta\operatorname{div}\underline{p}$$

$$\rho\theta\varsigma - \rho\theta\dot{\eta} = \theta\operatorname{div}\underline{p} - \rho r$$

$$\rho\omega^* = \rho\theta\dot{\eta}' - \rho r + \operatorname{div}\underline{q} \geq 0$$

$$\rho r - \rho\dot{\varepsilon} + \underline{T}:\underline{D} - \operatorname{div}\underline{q} = 0 \qquad \operatorname{div}\underline{q} - \rho r = \underline{T}:\underline{D} - \rho\dot{\varepsilon}$$

$$\rho\omega^* = \rho\theta\dot{\eta}' - \rho\dot{\varepsilon} + \underline{T}:\underline{D} = -\rho(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta}') + \underline{T}:\underline{D}$$

$$\varepsilon = \psi + \theta\eta \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\psi} + \eta\dot{\theta} + \dot{\eta}\theta$$

مقایسه با ترمودینامیک کلاسیک

$\varepsilon = \varepsilon' \ , \ \eta = \eta' \ , \ \psi = \psi'$

$\psi = \psi(\rho, \theta) \quad etc \ , \ \psi = \psi(\underset{\sim}{F}, \theta) \ , \ \theta = \theta(t) \ , \ \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{0}$

$\rho w^* = -\rho\theta(\dot{\eta} - \dot{\eta}') + \rho\theta\zeta + \underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{g} = \rho\theta\zeta$

$\rho w^* \geq 0 \quad ; \quad \zeta \geq 0$

$\rho\dot{\eta} = \rho(s + \zeta) \quad , \quad \rho r - \rho\dot{\varepsilon} + \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} = 0$

$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} = \rho\theta\zeta$

$-\rho(\dot{\varepsilon} + \theta\dot{\eta}) + \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} - \rho\theta\zeta = 0$

$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} - \rho\theta\zeta = 0$

فرآیندهای خاص

a) Adiabatic

$r = 0 \quad (1)\ \zeta = \dot{\eta} \quad \Rightarrow \dot{\eta} \geq 0 \quad \rho\dot{\varepsilon} = \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D}$

b) Isothermal

$\theta = \theta_0 \longrightarrow \dot{\theta} = 0 \qquad (2)\ \rho\theta\zeta = \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} - \rho\dot{\psi} \geq 0$

$\rho\dot{\psi} \leq \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D}$

c) Newtonian Fluid

$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$

$\psi = \psi' = \psi(\theta, \rho)$

$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \ , \ p = \rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \quad , \quad \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{0}$

$(2) \Rightarrow -\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \eta\dot{\theta}\right) - p d_{ii} + \lambda(d_{kk})^2$
$+ 2\mu d_{ij}d_{ij} - \rho\theta\zeta = 0$

$\zeta \geq 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda(d_{kk})^2 + 2\mu d_{ij}d_{ij} \geq 0$

$\lambda + 2/3\mu \geq 0$

$\mu \geq 0$

عدم تغییر بردار شار حرارتی در ترمو الاستیک

$\underset{\sim}{q} = \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) \qquad \underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{\nabla}\theta$

$\underset{\sim}{q}^+ = \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}^+, \theta^+, \underset{\sim}{g}^+)$ عدم تغییر در حرکت صلب الحاقی :

$\underset{\sim}{q}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{q} \ , \ \underset{\sim}{F}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F} \ , \ \theta^+ = \theta \ , \ \underset{\sim}{g}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{g}$

$\Rightarrow \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{Q}\hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) \qquad \forall \underset{\sim}{Q} \ \ s.t \ \ \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{I}$

$\Rightarrow \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{R}\underset{\sim}{U}, \theta, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{Q}\hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g})$

یک شرط لازم $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{R}^T$ را در نظر می‌گیریم :

$\Rightarrow \underset{\sim}{q} = \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{R}\hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{U}, \theta, \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g}) = \underset{\sim}{R}\hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{C}, \theta, \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g})$

بر اساس معادله می‌شود که شرط فوق کافی نیز هست

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{U}^{-1}$

$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{F}\hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{C}, \theta, \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{g})$ در قانون حرارتی فوریه :

$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{R}A(\underset{\sim}{C}, \theta)\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g} \qquad \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{F}A(\underset{\sim}{C}, \theta)\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{g}$

$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{R}A(\theta)\underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{g}$ برای مواد صلب : $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{I}$

صورت دیگر بردار شار حرارت

$\underset{\sim}{q} = \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g}) = \bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta) + \tilde{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g})$

$\lim_{\alpha \to 0} \tilde{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \alpha\underset{\sim}{g}) = 0 \qquad \bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta) = \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, 0)$

$\underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{g} \leq 0 \qquad \hat{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g})\cdot\underset{\sim}{g} \leq 0$

$\bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta)\cdot\underset{\sim}{g} + \tilde{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{F}, \theta, \underset{\sim}{g})\cdot\underset{\sim}{g} \leq 0$

در نهایت اگر $\underset{\sim}{\varepsilon}$ را به $\underset{\sim}{\varepsilon}$ بدل کرده بر h تقسیم می‌کنیم، $\alpha \to 0$ میل می‌دهیم

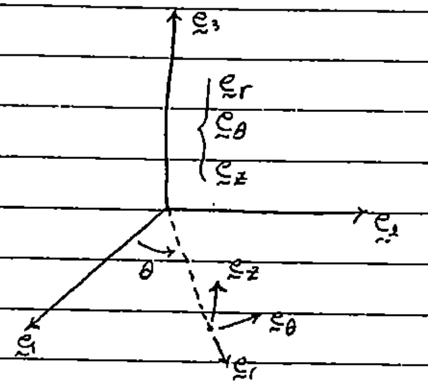
$$\Rightarrow \tilde{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{r}, \theta) \cdot \underset{\sim}{v} = 0 \quad \forall \underset{\sim}{v}$$

$$\Rightarrow \tilde{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{r}, \theta) = 0 \Rightarrow \tilde{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\underset{\sim}{r}, \theta, \underset{\sim}{0}) = 0$$

یعنی در نتیجه گرادیان ... بردار ... صفر می‌شود.

" مختصات منحنی الخط "

1) مختصات استوانه‌ای



$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_r = \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_\theta = -\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_z = \underset{\sim}{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}_r \\ \underset{\sim}{e}_\theta \\ \underset{\sim}{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}_1 \\ \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_3 \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}_1 \\ \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{e}_r}{\partial \theta} = \underset{\sim}{e}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \underset{\sim}{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underset{\sim}{e}_r$$

$$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}_i = a_1 \underset{\sim}{e}_1 + a_2 \underset{\sim}{e}_2 + a_3 \underset{\sim}{e}_3$$

$$= a_r \underset{\sim}{e}_r + a_\theta \underset{\sim}{e}_\theta + a_z \underset{\sim}{e}_z$$

$$\Rightarrow \langle \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \langle \underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\theta, \underset{\sim}{e}_z \rangle \begin{Bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{Bmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

اگر $\underset{\sim}{A}$ یک تانسور مرتبه ۲ باشد،

$$\underset{\sim}{A} = A_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

$$\underset{\sim}{A} = \langle \underset{\sim}{e}_1 \quad \underset{\sim}{e}_2 \quad \underset{\sim}{e}_3 \rangle \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}_1 \\ \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \langle \underset{\sim}{e}_r \quad \underset{\sim}{e}_\theta \quad \underset{\sim}{e}_z \rangle \begin{pmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rz} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{zr} & A_{z\theta} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{e}_r \\ \underset{\sim}{e}_\theta \\ \underset{\sim}{e}_z \end{Bmatrix}$$

$$A_{rr} = \underset{\sim}{e}_r \cdot \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{e}_r \qquad A_{\theta z} = \underset{\sim}{e}_\theta \cdot \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{e}_z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{rr} & A_{r\theta} & A_{rz} \\ A_{\theta r} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{zr} & A_{z\theta} & A_{zz} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \underset{\sim}{R}^T$$

$$\underset{\sim}{A}^* = \underset{\sim}{R}\, \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{R}^T \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{A}^* \underset{\sim}{R}$$

$$A_{r\theta} = \underset{\sim}{e}_r \cdot \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{e}_\theta = (\cos\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \sin\theta\, \underset{\sim}{e}_2) \cdot \underset{\sim}{A}(-\sin\theta\, \underset{\sim}{e}_1 + \cos\theta\, \underset{\sim}{e}_2)$$

$$= -\sin\theta\cos\theta\, A_{11} + \cos^2\theta\, A_{12} - \sin^2\theta\, A_{21} + \sin\theta\cos\theta\, A_{22}$$

گرادیان اسکالر:

$$(\text{grad}\,\varphi) \cdot d\underset{\sim}{x} \triangleq d\varphi$$

$$d\underset{\sim}{x} = dx_1\, \underset{\sim}{e}_1 + dx_2\, \underset{\sim}{e}_2 + dx_3\, \underset{\sim}{e}_3$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3$$

$$(\text{grad}\,\varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad \underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\text{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \varphi\overleftarrow{\nabla}$$

$$\underset{\sim}{x} = r\,\underset{\sim}{e}_r + z\,\underset{\sim}{e}_z$$

$$d\underset{\sim}{x} = dr\,\underset{\sim}{e}_r + r\,d\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta + dz\,\underset{\sim}{e}_z$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

$$\Rightarrow \quad (\text{grad}\,\varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (\text{grad}\,\varphi)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad (\text{grad}\,\varphi)_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underset{\sim}{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\underset{\sim}{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\underset{\sim}{e}_z = \vec{\nabla}\varphi = \varphi\overleftarrow{\nabla}$$

$$\text{grad}\,\underset{\sim}{v} \triangleq \underset{\sim}{v}\overleftarrow{\underset{\sim}{\nabla}} = (v_i\,\underset{\sim}{e}_i)(\underset{\sim}{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\underset{\sim}{e}_i\,\underset{\sim}{e}_j$$

$$\text{grad}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\overleftarrow{\nabla} = (v_r\,\underset{\sim}{e}_r + v_\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta + v_z\,\underset{\sim}{e}_z)$$

$$(\underset{\sim}{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underset{\sim}{e}_z \frac{\partial}{\partial z})$$

$$= \frac{\partial v_r}{\partial r}\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_r + \frac{\partial v_z}{\partial r}\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{v_r}{r}\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$- \frac{v_\theta}{r}\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial z}\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_z$$

$$+ \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_z.$$

$$\text{grad}\,\underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$(\text{grad}\,\underset{\sim}{v})_{r\theta} = \underset{\sim}{e}_r \cdot (\text{grad}\,\underset{\sim}{v})\,\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\text{div}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\overleftarrow{\nabla} = \text{trace}\,(\text{grad}\,\underset{\sim}{v})$$

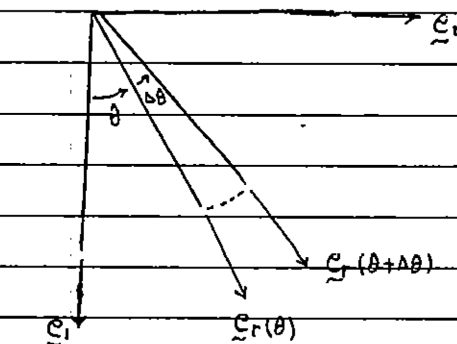
$$= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

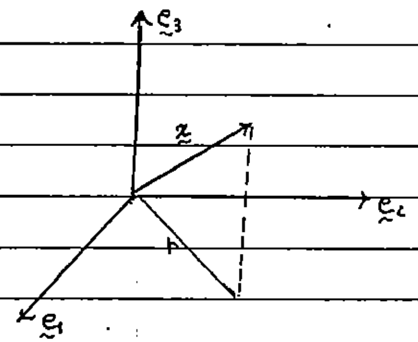
$$\frac{\partial \underset{\sim}{e}_r}{\partial \theta} = \underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underset{\sim}{e}_r$$

$$|\Delta \underset{\sim}{e}_r| = \Delta\theta$$

$$\Rightarrow d\underset{\sim}{e}_r = \underset{\sim}{e}_\theta\,d\theta$$





اگر $\underset{\sim}{T}$ یک تانسور مرتبه دو باشد در این صورت $div\,\underset{\sim}{T}$ یک بردار است

$$div\,\underset{\sim}{T} \triangleq T_{ij,j}\,\underset{\sim}{e}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{T}\cdot\overleftarrow{\underset{\sim}{\nabla}}$$

$$\underset{\sim}{T}\cdot\overleftarrow{\underset{\sim}{\nabla}} = (T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i\otimes\underset{\sim}{e}_j)\cdot(\underset{\sim}{e}_m\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_m}}) = T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i\,\delta_{jm}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x_m}}$$

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_m}\delta_{jm}\,\underset{\sim}{e}_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\underset{\sim}{e}_i = T_{ij,j}\,\underset{\sim}{e}_i$$

برای تانسور متقارن $\underset{\sim}{T}$ داریم:

$$div\,\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\cdot\overleftarrow{\underset{\sim}{\nabla}} = \overrightarrow{\underset{\sim}{\nabla}}\cdot\underset{\sim}{T}$$

$$div\,\underset{\sim}{T} = \begin{pmatrix} T_{rr}\,\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_r + T_{r\theta}\,\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_\theta + T_{rz}\,\underset{\sim}{e}_r\underset{\sim}{e}_z \\ T_{\theta r}\,\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_r + T_{\theta\theta}\,\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_\theta + T_{\theta z}\,\underset{\sim}{e}_\theta\underset{\sim}{e}_z \\ T_{zr}\,\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_r + T_{z\theta}\,\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_\theta + T_{zz}\,\underset{\sim}{e}_z\underset{\sim}{e}_z \end{pmatrix}\cdot\Big(\underset{\sim}{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \underset{\sim}{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)$$

$$= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r}\underset{\sim}{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}\underset{\sim}{e}_r + \frac{T_{rr}}{r}\underset{\sim}{e}_r + \frac{T_{r\theta}}{r}\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}\underset{\sim}{e}_r$$

$$+ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}\underset{\sim}{e}_\theta + \frac{T_{\theta r}}{r}\underset{\sim}{e}_\theta - \frac{T_{\theta\theta}}{r}\underset{\sim}{e}_r + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$+ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r}\underset{\sim}{e}_z + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial\theta}\underset{\sim}{e}_z + \frac{T_{zr}}{r}\underset{\sim}{e}_z + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}\underset{\sim}{e}_z$$

$$(div\,\underset{\sim}{T})_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}$$

$$(div\,\underset{\sim}{T})_\theta = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta}+T_{\theta r}}{r}$$

$$(div\,\underset{\sim}{T})_z = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

$$Curl\,\underset{\sim}{v} = \overrightarrow{\underset{\sim}{\nabla}}\times\overrightarrow{\underset{\sim}{v}}$$

$$= \Big(\underset{\sim}{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \underset{\sim}{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(v_r\underset{\sim}{e}_r + v_\theta\underset{\sim}{e}_\theta + v_z\underset{\sim}{e}_z)$$

$$\underset{\sim}{e}_r\times\underset{\sim}{e}_\theta = \underset{\sim}{e}_z = -\underset{\sim}{e}_\theta\times\underset{\sim}{e}_r$$

$$\underset{\sim}{e}_\theta\times\underset{\sim}{e}_z = \underset{\sim}{e}_r = -\underset{\sim}{e}_z\times\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\underset{\sim}{e}_z\times\underset{\sim}{e}_r = \underset{\sim}{e}_\theta = -\underset{\sim}{e}_r\times\underset{\sim}{e}_z$$

$$Curl\,\underset{\sim}{v} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\underset{\sim}{e}_z - \frac{\partial v_z}{\partial r}\underset{\sim}{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\underset{\sim}{e}_z - \frac{v_\theta}{r}\underset{\sim}{e}_z + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\underset{\sim}{e}_r + \frac{\partial v_r}{\partial z}\underset{\sim}{e}_\theta - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\underset{\sim}{e}_r$$

$$\therefore\ Curl\,\underset{\sim}{v} = \Big(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\Big)\underset{\sim}{e}_r + \Big(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\Big)\underset{\sim}{e}_\theta + \Big(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\Big)\underset{\sim}{e}_z$$

$$\mathcal{E}:\quad \psi = \psi(r,\theta,z,t)$$

$$\dot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\underset{\sim}{v}\cdot\nabla)\psi$$

در مختصات کارتزین داشتیم:

$$\dot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}v_i$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial t} + v_i\frac{\partial}{\partial x_i}\psi$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla})\psi$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\psi$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_r\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\underline{a} = \dot{\underline{v}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(v_r\underline{e}_r + v_\theta\underline{e}_\theta + v_z\underline{e}_z) +$$

$$+ \left(v_r\frac{\partial}{\partial r} + v_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_r\underline{e}_r + v_\theta\underline{e}_\theta + v_z\underline{e}_z)$$

$$= a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta + a_z\underline{e}_z$$

به تفکیک:

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \left(\underline{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\underline{e}_\theta + \underline{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

اگر ψ اسکالر باشد:

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

اگر $\underline{v}$ برداری باشد:

$$\nabla^2\underline{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(v_r\underline{e}_r + v_\theta\underline{e}_\theta + v_z\underline{e}_z)$$

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{e}_r}{\partial \theta^2} = -\underline{e}_r$$

$$\frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{e}_\theta}{\partial \theta^2} = -\underline{e}_\theta$$

در انتها داریم

$$\nabla^2\underline{v} = (\nabla^2 v_r)\underline{e}_r + (\nabla^2 v_\theta)\underline{e}_\theta + (\nabla^2 v_z)\underline{e}_z$$

$$+ \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r^2}\frac{\partial^2 \underline{e}_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r^2}\frac{\partial^2 \underline{e}_\theta}{\partial \theta^2}$$

$$\therefore \nabla^2\underline{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\underline{e}_r + \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\underline{e}_\theta + (\nabla^2 v_z)\underline{e}_z$$

$$\nabla^2 v_r = \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\underline{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \rho\frac{v_r}{r} = 0$$

اصل تعادل ممنتوم خطی :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$$

حال به سراغ گرادیان تغییر شکل می‌رویم :

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\, d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = R\, \mathbf{e}_R + Z\, \mathbf{e}_Z \quad , \quad \mathbf{x} = r\, \mathbf{e}_r + z\, \mathbf{e}_z$$

$$d\mathbf{X} = dR\, \mathbf{e}_R + R\, d\Theta\, \mathbf{e}_\Theta + dZ\, \mathbf{e}_Z$$

$$d\mathbf{x} = dr\, \mathbf{e}_r + r\, d\theta\, \mathbf{e}_\theta + dz\, \mathbf{e}_z$$

$$r = r(R, \Theta, Z, t)$$

$$\theta = \theta(R, \Theta, Z, t)$$

$$z = z(R, \Theta, Z, t)$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial R} dR + \frac{\partial r}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial r}{\partial Z} dZ$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\, d\mathbf{X} \Rightarrow \left(\frac{\partial r}{\partial R} dR + \frac{\partial r}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial r}{\partial Z} dZ\right) \mathbf{e}_r$$

$$+ r\left(\frac{\partial \theta}{\partial R} dR + \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial \theta}{\partial Z} dZ\right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial R} dR + \frac{\partial z}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial z}{\partial Z} dZ\right) \mathbf{e}_z$$

$$= dR\, \mathbf{F}\, \mathbf{e}_R + R\, d\Theta\, \mathbf{F}\, \mathbf{e}_\Theta + dZ\, \mathbf{F}\, \mathbf{e}_Z$$

$$\mathbf{F}\, \mathbf{e}_R = \frac{\partial r}{\partial R} \mathbf{e}_r + r \frac{\partial \theta}{\partial R} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial R} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{F}\, \mathbf{e}_\Theta = \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} \mathbf{e}_r + \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \Theta} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{F}\, \mathbf{e}_Z = \frac{\partial r}{\partial Z} \mathbf{e}_r + r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial z}{\partial Z} \mathbf{e}_z$$

$$F_{r,R} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{F}\, \mathbf{e}_R = \frac{\partial r}{\partial R}$$

$$F_{r,\Theta} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{F}\, \mathbf{e}_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \Theta}$$

$$\vdots$$

در فرض استوانه‌ای $\overline{\mathbf{F}}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}$

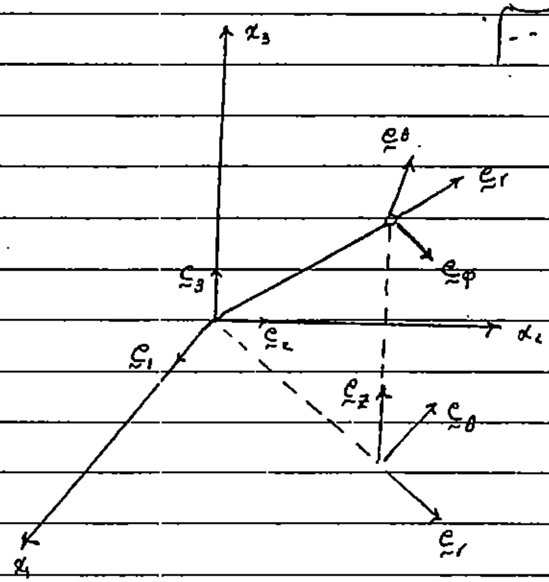
$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^{*} = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F}^{*} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{R}_{\circ}^{T}$$

$$\underset{\sim}{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

همچنین $\underset{\sim}{e}_r$، $\underset{\sim}{e}_\varphi$ و $\underset{\sim}{e}_\theta$ در مختصات کروی را برحسب $\underset{\sim}{e}_r$، $\underset{\sim}{e}_z$ در مختصات استوانه‌ای می‌توانیم بنویسیم ...



به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقیست ...

$$\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 25/16 & 1/4 \\ 1/4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9/16 & 1/4 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$S^{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) = \frac{E}{1-\nu^2}(9 + 16\nu)\frac{1}{32}$$

$$S^{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) = \frac{E}{1-\nu^2}(16 + 9\nu)\frac{1}{32}$$

$$S^{12} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{1-\nu}{2}(2\varepsilon_{12}) = \frac{E}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{1}{2}$$

$$b = \det \underset{\sim}{b} = \frac{50}{16} - \frac{1}{16} = \frac{49}{16}, \quad a = \det \underset{\sim}{a} = 1 \quad \sqrt{I_3} = \frac{7}{4}$$

$\underset{\sim}{t} =$ تنش کوشی در دستگاه نهایی :

$\dfrac{\underset{\sim}{S}}{\sqrt{I_3}} = \underset{\sim}{\tau} =$ تنش کوشی در دستگاه مرجع :

$$t^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial X^m}\frac{\partial x^j}{\partial X^n}\tau^{mn}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}X^2 & -\frac{1}{4}X^1 \\ \frac{1}{4}X^1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{t} = \left(\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}\right)\underset{\sim}{\tau}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}\right)^T = \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}E$$

$$= \frac{4E}{7}\begin{pmatrix} 3/4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{27}{4}-16 & 25 \\ -4 & 32 \end{pmatrix} = \frac{E}{7}\begin{pmatrix} 81/4 & -53 \\ -53 & 228 \end{pmatrix}$$

فرض داشتیم $\mathcal{L}: \nu = 0$

Universal Deformation

$$W = W(\underset{\sim}{F}) = \Phi(I_1, I_2, I_3)$$

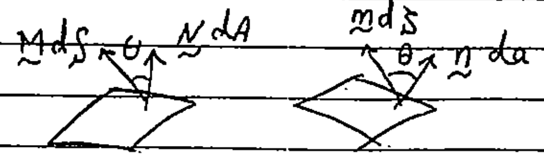
$$\underset{\sim}{P} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{F}} \qquad \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{P} = -\rho_0 a$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{F}} + \cdots\right) = 0$$

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{F}} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{F} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\nabla}\cdot(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{f}) = 0$$

$$\underset{\sim}{F} = \nabla \underset{\sim}{f} \qquad \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{X})$$

$F_{iA,K} = 0$ — تغییرشکل‌های دیگر در محیط‌های الاستیک تراکم‌ناپذیر غیرممکن است.



$$\underset{\sim}{n}\, da = J\, \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}\, dA \qquad (da)^2 = J^2 (dA)^2\, \underset{\sim}{N}\cdot \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{N}$$

$$\underset{\sim}{m}\, ds = \underset{\sim}{F}\, \underset{\sim}{M}\, dS \qquad (ds)^2 = (dS)^2\, \underset{\sim}{M}\cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}$$

$$\cos\theta = \underset{\sim}{m}\cdot \underset{\sim}{n} \rightarrow -\dot{\theta}\sin\theta = \dot{\underset{\sim}{m}}\cdot \underset{\sim}{n} + \underset{\sim}{m}\, \dot{\underset{\sim}{n}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{n}}\, da + \underset{\sim}{n}\, \dot{da} = J \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\, \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}\, dA + J\, \dot{\overline{\underset{\sim}{F}^{-T}}}\, \underset{\sim}{N}\, dA$$

$$= \underset{\sim}{n}\, da (\operatorname{div} \underset{\sim}{v}) - \underset{\sim}{L}^{+T}\, \underset{\sim}{n}\, da$$

$$\Rightarrow \dot{\overline{da}} = da \operatorname{div} \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{n}\cdot \underset{\sim}{L}^{+T}\, \underset{\sim}{n}\, da$$

$$\frac{\dot{da}}{da} = \operatorname{div} \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{n}\cdot \underset{\sim}{L}^{+T}\, \underset{\sim}{n} = \operatorname{div} \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{n}\cdot \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{n}$$

$$\dot{\underset{\sim}{n}} = \cancel{\underset{\sim}{n} \operatorname{div} \underset{\sim}{v}} - \underset{\sim}{L}^{T}\underset{\sim}{n} - \cancel{\underset{\sim}{n} \operatorname{div} \underset{\sim}{v}} + (\underset{\sim}{n}\cdot \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{n})\, \underset{\sim}{n}$$

$$\dot{\underset{\sim}{n}} = \left[(\underset{\sim}{n}\cdot \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{n}) \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{L}^{T} \right] \underset{\sim}{n}$$

$$\dot{\theta} = \| \dot{\underset{\sim}{m}} - \dot{\underset{\sim}{n}} \|$$

$$= 2\left(\underset{\sim}{m}\cdot \underset{\sim}{D}^{2} \underset{\sim}{m} - (\underset{\sim}{m}\cdot \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{m})^2 \right)^{1/2}$$

$\underset{\sim}{m} = \langle 0 , 1 \rangle$ در حالت دو بعدی نشان داد

$$\dot{\theta} = 2 d_{12}$$

موضوع: .... تاریخ: ....

مثال:

$$f(x) = x \sin x$$

$$f(x+\varepsilon t) = (x+\varepsilon t)\sin(\varepsilon t + x)$$

$$\frac{D}{D\varepsilon} f(x+\varepsilon t) = t\sin(x+\varepsilon t) + (x+\varepsilon t)\,t\cos(x+\varepsilon t)$$

$\varepsilon \to 0$ $\qquad Df_t = t\sin x + x t\cos x$

$t = 1$ $\qquad Df = \sin x + x\cos x$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x+\varepsilon t) = (x+\varepsilon t)^3$$

$$\frac{Df(x+\varepsilon t)}{D\varepsilon} = 3t(x+\varepsilon t)^2$$

$\varepsilon \to 0$ $\qquad Df_t = 3t\,x^2$

موضوع: .... تاریخ: ....

مشتق جهت‌دار در جهت میدان جابجایی $\underset{\sim}{u}$

$$\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i$$

$$\underset{\sim}{F} = \frac{\partial \underset{\sim}{x}}{\partial \underset{\sim}{X}}$$

$$\frac{D\underset{\sim}{F}(\cancel{X}+\varepsilon \underset{\sim}{u})}{D\varepsilon} = \frac{D}{D\varepsilon}\left(\underset{\sim}{F} + \varepsilon\frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial \underset{\sim}{X}}\right) \to \frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial \underset{\sim}{X}}$$

$\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\underset{\sim}{x} \to \underset{\sim}{X}} \Delta \underset{\sim}{F} = \frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{X}}(\Delta \underset{\sim}{x}) = \frac{\partial \underset{\sim}{u}}{\partial \underset{\sim}{X}} \qquad \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{u}$$

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{I} + \vec{\nabla}_{\underset{\sim}{X}} \underset{\sim}{u} \longrightarrow \Delta \underset{\sim}{F} = \vec{\nabla}_{\underset{\sim}{X}} \underset{\sim}{u}$$

$\mathcal{L}:\ \underset{\sim}{x} \to \underset{\sim}{X} \Rightarrow \Delta \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{u}$ بسیار کوچک $\|\underset{\sim}{u}\| \ll 1$

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{m}\cdot\underset{\sim}{m} \qquad \underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{M}$$

$$= e_{ij}\, m_i\, m_j$$

۱. اگر $\phi = a_{ij}x_ix_j$ یک تابع اسکالر درجه دوم در فضای V_N (یعنی $i=1,2,\dots N$) باشد مقدار هر یک از عبارتهای A_i و A_{ij} را بدست آورید.

$$A_i = \phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad , \quad A_{ij} = \phi_{,ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

ثانیاً اگر $b_{ij}x_ix_j = cte$ مقدار ثابتی باشد ثابت کنید ماکزیمم و مینیمم ϕ، ریشه‌های دترمینان $|a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0$ هستند.

۲. روابط زیر را در حالت خاص نماد جایگشت در فضای V_3 اثبات کنید و فرم مشابهی برای این روابط در V_2 و V_N بدست آورید.

$$e_{mnp}e_{ijk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{pmatrix} \; ; \quad e_{ijk}e_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

$$e_{ijk}e_{mjk} = 2\delta_{im} \quad , \quad e_{ijk}e_{ijk} = 6$$

۳. اگر T_{ijk} یک تانسور مرتبه سوم در V_4 باشد، در اینصورت تعداد مؤلفه‌های مستقل آن را در حالتهای زیر بدست آورید. الف) بدون قید و شرط ب) اگر $T_{ijk} = T_{jik}$ ج) اگر $T_{ijk} = -T_{ijk}$ د) اگر شرط ب و ج همزمان برقرار باشند ه) اگر شرط ب به همراه رابطه $T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0$ بطور همزمان برقرار باشند و) اگر شرط ج به همراه رابطه (ه) اخیر بطور همزمان برقرار باشند.

۴. ثابت کنید اگر A_i یک میدان برداری در فضای V_N باشد در اینصورت عبارتهای زیر تانسورهای مرتبه دوم، سوم و $M+1$ دکارتی هستند:

$$A_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \;,\quad A_{ijk} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_k} \;,\; \dots \;,\; A_{ii_1i_2\dots i_M} = \frac{\partial^M A_i}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_M}}$$

۵. بردارهای پایه دستگاه مختصات قطبی کروی را برحسب بردارهای پایه دستگاه مختصات دکارتی بدست آورید.

۶. اگر $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots x_N)$ یک تابع همگن درجه m باشد (یعنی $\phi(\lambda \underline{x}) = \lambda^m \phi(\underline{x})$) در اینصورت رابطه زیر را اثبات کنید: $x_i\phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}x_i = m\phi$

۷. اگر A_{ij} یک تانسور مرتبه دوم دکارتی متقارن باشد ($A_{ij} = A_{ji}$) در اینصورت داریم $e_{ijk}A_{ij} = 0$. آیا عکس رابطه اخیر صحیح است، یعنی اگر داشته باشیم $e_{ijk}A_{ij} = 0$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که A_{ij} متقارن است.

۸. روابط زیر را در حالت برای بردارهای $\underline{a}$ و $\underline{b}$ و $\underline{c}$ با استفاده از جبر تانسورهای دکارتی ثابت کنید.

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c} \qquad \underline{a} = a_i\underline{e}_i$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{a} = 0 \qquad \underline{b} = b_i\underline{e}_i$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{b} = 0 \qquad \underline{c} = c_i\underline{e}_i$$

$$(\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = 0$$

۹. ثابت کنید اگر $e_{ijkl}A_{ij} = 0$ در V_4، در اینصورت A_{ij} متقارن است.

۱. روابط زیر را در خصوص بردارهای $\underline{a}$ ، $\underline{b}$ ، $\underline{c}$ ، $\underline{d}$ اثبات کنید:

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) - \underline{b}\times(\underline{a}\times\underline{c}) + \underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b}) = 0$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{b}\times\underline{c})\times(\underline{b}\times\underline{a}) = [\underline{a};\underline{b};\underline{c}]^2$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) + (\underline{b}\times\underline{c})\cdot(\underline{a}\times\underline{d}) + (\underline{c}\times\underline{a})\cdot(\underline{b}\times\underline{d}) = 0$$

۲. ثابت کنید حجم متوازی السطوحی که یالهای همرس آن بردارهای $\underline{a}+\underline{b}$ ، $\underline{b}+\underline{c}$ ، $\underline{c}+\underline{a}$ باشد دو برابر حجم متوازی السطوحی است که یالهای همرس آن بردارهای $\underline{a}$ ، $\underline{b}$ ، $\underline{c}$ باشد.

۳. اگر u ، v و w سه تابع اسکالر باشند که توسط رابطهٔ $f(u,v,w)=0$ به هم مربوط می‌شوند، در اینصورت ثابت کنید: $[\underline{\nabla}u, \underline{\nabla}v, \underline{\nabla}w] = 0$

۴. اتحادهای زیر را در خصوص اپراتور $\underline{\nabla}$ اثبات کنید:

$$\underline{\nabla}\cdot\phi\underline{v} = \phi\,\underline{\nabla}\cdot\underline{v} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\phi$$

$$\underline{\nabla}(\underline{u}\cdot\underline{v}) = \underline{u}\,\underline{\nabla}\,\underline{v} + \underline{v}\,\underline{\nabla}\,\underline{u} + \underline{u}\times(\underline{\nabla}\times\underline{v}) + \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{u})$$

$$\underline{\nabla}\phi_1\times\underline{\nabla}\phi_2 = \underline{\nabla}\times(\phi_1\underline{\nabla}\phi_2) - \underline{\nabla}\times(\phi_2\underline{\nabla}\phi_1)$$

۵. اگر $\underline{R} = x_i\underline{e}_i$ ، $r = \|\underline{R}\|$ ثابت کنید $\operatorname{curl}\underline{R} = 0$ ضمناً $\underline{\nabla}\cdot\underline{R}$ برابر چیست. ثانیاً اگر $\underline{A}$ یک بردار ثابت دلخواه باشد در اینصورت عبارت $(\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\underline{R} = ?$ برابر چیست و ثابت کنید $\underline{\nabla}(\underline{A}\cdot\underline{R}) = \underline{A}$

۶. اگر $u = f(x+y)$ و $v = g(x+y)$ باشد در اینصورت نشان دهید $\underline{\nabla}u\times\underline{\nabla}v = 0$ ، حال اگر $u = f(x,y)$ ، $v = g(x,y)$ ، $w = h(x,y)$ باشد، نشان دهید $[\underline{\nabla}u;\underline{\nabla}v;\underline{\nabla}w] = 0$

۷. اگر c کانتور محیطی سطح s باشد در اینصورت با استفاده از لم گرین ثابت کنید

$$\int_s (f_{,x}\,g_{,y} - f_{,y}\,g_{,x})\,dx\,dy = \int_c f\,dg$$

قضیه استوکس

$$\int_s e_{ijk}\,n_k\,f_{j,i}\,ds = \int_c f_i\,dx_i \quad (i=1,2,3)^{\text{at } V_3},\ (i=1,2)^{\text{at } V_2}$$

۸. اگر ∂P رویهٔ منظم بسته‌ای باشد که P را احاطه کرده است و $\underline{R} = x_i\underline{e}_i$ ، $r = \|\underline{R}\|$ در اینصورت ثابت کنید:

$$\int_{\partial P} \frac{x_i n_i}{(x_i x_i)^{3/2}}\,da = \begin{cases} 0 & \text{اگر o در داخل P نباشد} \\ 4\pi & \text{اگر o در داخل P باشد} \end{cases}$$

۱. اگر λ_i مقادیر ویژه نظیر بردار ویژه $\underline{n}_i$ تانسور متقارن حقیقی $\underline{T}$ باشد ، نمایش ماتریسی $\underline{T}$ را در دستگاه مختصات کارتزین $\underline{e}_i = \underline{n}_i$ بنویسید ، همچنین نمایش ماتریسی $\underline{T}$ را در دستگاه مختصاتی که از دوران ۴۵ حول محور x_1 حاصل شده است بدست آورید.

$$\begin{cases} (\underline{T}\,\underline{S})\,\underline{a} \triangleq \underline{T}(\underline{S}\,\underline{a}) \\ (\underline{T} \pm \underline{S})\,\underline{a} \triangleq \underline{T}\,\underline{a} + \underline{S}\,\underline{a} \end{cases}$$

۲. اگر جمع و ضرب تانسورهای مرتبه دوم را بصورت مقابل تعریف کنیم ، در مورد ویژگی تانسوری نتایج حاصل بحث کنید ، آیا تعاریف فوق از قانون جابجائی تبعیت می‌کند؟ اگر $\underline{T}$ تانسور دوران ۹۰ درجه حول x_1 و $\underline{S}$ تانسور دوران ۹۰ درجه حول x_3 باشد در اینصورت نمایش ماتریسی تانسورهای $\underline{T}$ و $\underline{S}$ را پیدا کرده و نشان دهید $\underline{T}\,\underline{S} \neq \underline{S}\,\underline{T}$.

۳. اگر $\underline{T}$ تانسوری باشد که هر بردار را به اندازه ضریب λ تغییر طول داده و سپس آن را به تصویر آینه‌ای نسبت به صفحه‌ای با بردار یکه $\underline{n}$ نگاشت کند در اینصورت نمایش ماتریسی $\underline{T}$ را بدست آورید.

۴. اگر w_{ij} یک تانسور پادمتقارن باشد و b_i و a_i بردار باشند و داشته باشیم : $a_i = w_{ij} b_j$ یعنی $\underline{a} = \underline{w}\,\underline{b}$ در اینصورت ثابت کنید $\underline{a} = \bar{\underline{w}} \times \underline{b}$ به طوری که $\bar{w}_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} w_{jk}$ و $w_{ij} = -e_{ijk} \bar{w}_k$ ($\bar{\underline{w}}$ را بردار محوری متناظر با تانسور پادمتقارن $\underline{w}$ گویند)

۵. اگر رابطه $P_{ijk} x_i x_j x_k = 0$ به ازای هر $\underline{x}$ دلخواه برقرار باشد در اینصورت در مورد تانسور P_{ijk} چه می‌توان گفت؟

۶. اگر A_{ij} یک تانسور پادمتقارن دلخواه باشد و داشته باشیم $tr(\underline{B}\,\underline{A}^T) = \underline{B} : \underline{A}^T = B_{ij} A_{ij} = 0$ در اینصورت در مورد ماتریس $\underline{B}$ چه می‌توان گفت؟

۷. اگر A_{ijk} یک تانسور پادمتقارن دلخواه باشد در اینصورت تعداد مولفه‌های مستقل آن را در R^3 بدست آورید، حال اگر رابطه $B_{ijk} A_{ijk} = 0$ به ازای هر $\underline{A}$ دلخواه پادمتقارن برقرار باشد در اینصورت تعداد مولفه‌های مستقل $\underline{B}$ را بدست آورید.

۸. اگر $\underline{R} = x_i \underline{e}_i$ و $r = \|\underline{R}\|$ ، $\underline{A}$ یک بردار ثابت دلخواه باشد در اینصورت روابط زیر را ثابت کنید. $(N=3)$

$$\nabla \times \underline{R} = \underline{0} \,, \quad \nabla \cdot \underline{R} = N \,, \quad \nabla r^n = n r^{n-2} \underline{R} \,, \quad \nabla \times \left[\left(\frac{1}{r}\right)(\underline{A} \times \underline{R})\right] = \frac{1}{r}\underline{A} + \frac{\underline{A}\cdot\underline{R}}{r^3}\underline{R}$$

۹. اگر c منحنی بسته‌ای باشد، نشان دهید

$$\oint_c (u \nabla v + v \nabla u) \cdot d\underline{R} = \oint_c \underline{R}\, d\underline{R} = 0$$

۱۰. اگر s رویه بسته دلخواهی باشد که حجم V را محصور کرده است و $\underline{n}$ بردار یکه عمود بر s و $\underline{A}$ یک بردار ثابت دلخواه باشد ثابت کنید.

$$\int_s \underline{n} \cdot \underline{R}\, ds = \frac{1}{2} \int_s \nabla(r^2) \cdot \underline{n}\, ds = 3V$$

$$\int_s \underline{n} \times (\underline{A} \times \underline{R})\, ds = 2V\underline{A} \qquad \int_s x_i n_j\, ds = V \delta_{ij}$$

۱. با جمع و ضرب مناسب برداری تانسورها ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ تانسورهای مرتبهٔ دوم میدان، تشکیل یک فضای برداری می‌دهند.

۲. اگر $\underset{\sim}{P}$ تانسور تصویر نسبت به صفحه‌ای با بردار یکهٔ نرمال $\underset{\sim}{n}$ باشد، ثابت کنید: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{n}$
یا به فرم اندیسی $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ ؛ و همچنین ثابت کنید: $I_1 = I_2 = 2,\ I_3 = 0$

۳. تانسور دوران $\underset{\sim}{Q}$ به صورت زیر ارائه شده است. اولاً محور دوران و زاویهٔ آن را به دست آورید. ثانیاً اگر M در صفحهٔ عمود بر محور دوران باشد که از مبدأ عبور می‌کند و $\underset{\sim}{R}$ تانسور تقارن نسبت به این صفحه باشد، ثابت کنید $\underset{\sim}{R}+\underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{0}$، ثالثاً در مورد مقادیر ویژهٔ $\underset{\sim}{R}$ و $\underset{\sim}{Q}$ بحث کنید.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

۴. اگر $\underset{\sim}{P}$ نگاشتی باشد که هر بردار را به اندازهٔ زاویهٔ α حول تصویرش نسبت به صفحه‌ای با نرمال $\underset{\sim}{n}$ بچرخاند، در این صورت $\underset{\sim}{P}$ و فرم ماتریسی آن را به دست آورده و راجع به مقادیر ویژه و جهات اصلی آن و ویژگی تانسوری آن بحث کنید.

۵. اگر $\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S})$ تابع دلخواهی از تانسور $\underset{\sim}{S}$ باشد، در این صورت مشتق جهت‌دار $\underset{\sim}{f}$ را در راستای تانسور $\underset{\sim}{U}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. با استفاده از این تعریف، مشتق توابع ارائه شده را به دست آورید.

$$D\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{U}) \triangleq \frac{d}{d\varepsilon}\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S}+\varepsilon\underset{\sim}{U})\Big|_{\varepsilon=0} \qquad \underset{\sim}{f}=\det\underset{\sim}{S}\ ,\ \underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{S}\ ,\ \underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{S}^{-1}$$

$$\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{S}^{2}\ ,\ \underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{S}^{T}\underset{\sim}{S}\ ,\ \underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{S}^{n}$$

۶. با توجه به مسئلهٔ اخیر، مشتق جهت‌دار توابع زیر را در راستای میدان تغییر مکان $\underset{\sim}{u}$ به دست آورید به طوری که $\underset{\sim}{F}$ تانسور گرادیان تغییر فرم است.

$$D\underset{\sim}{E} \overset{?}{=} \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{F}\ ,\quad \underset{\sim}{\varepsilon}\triangleq\frac{1}{2}\left(\nabla\underset{\sim}{u}+(\nabla\underset{\sim}{u})^T\right)$$

$$D\underset{\sim}{C} \overset{?}{=} 2\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{\varepsilon}\underset{\sim}{F}\ ,\quad D\underset{\sim}{E}_0 = \nabla_0\underset{\sim}{E}=\underset{\sim}{\varepsilon}\ ,\quad \nabla_0\underset{\sim}{u}=\frac{\partial\underset{\sim}{u}}{\partial\underset{\sim}{X}}$$

$$D\underset{\sim}{F} \overset{?}{=} (\nabla\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{F}\ ,\quad D\underset{\sim}{B} \overset{?}{=} (\nabla\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{B}+\underset{\sim}{B}(\nabla\underset{\sim}{u})^T$$

$$DJ \overset{?}{=} J\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{u}\ ,\quad D\,dv \overset{?}{=} \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\varepsilon}\cdot dv$$

$\underset{\sim}{E}$ تانسور کرنش گرین و $\underset{\sim}{\varepsilon}$ تانسور کرنش خطی است.

۷. با خطی‌سازی دستگاه معادلات غیرخطی $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{0}$ با استفاده از مشتق‌گیری جهت‌دار آن در راستای بردار $\underset{\sim}{u}$، نحوهٔ تکرار روش عددی نیوتن - رافسون را در خصوص حل این دستگاه به دست آورید.

۸. از بین تمام منحنی‌های فضایی که از نقاط A با $\underset{\sim}{A}:\langle 1,1,2\rangle$ و B با $\underset{\sim}{B}:\langle 1,2,5\rangle$ عبور می‌کنند، معادلهٔ منحنی را به دست آورید که دارای حداقل طول باشد و همچنین بر روی سطح گردان فضایی $z=x^2+y^2$ قرار داشته باشد.

۹. اگر $\underset{\sim}{P}$ نگاشتی باشد که هر نقطه را به منعکس آن نسبت به دایرهٔ واحد ببرد، در این صورت با ارائهٔ فرم ماتریسی $\underset{\sim}{P}$ در مورد ویژگی تانسوری آن بحث کنید.

[illegible] $\tilde{\omega} = \tilde{R} \times \tilde{R}$

[illegible]

$\dot{\theta} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^{a} - \dot{\theta}^{b})$ [illegible]

[illegible]

$\dot{\theta}\sin\theta = (\dot{\omega}\cdot\dot{\omega}) + \ldots$ [illegible]

[illegible]

$$\dot{\tilde{M}} + \tilde{M}\tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}\tilde{M} = \frac{1}{2}\left[(\tilde{\Delta}\tilde{\omega}) - (\tilde{\omega}\tilde{\Delta}) - (\tilde{\omega}\tilde{\Delta})^{T}\right]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\tilde{n} = \tilde{m}(t) \times \tilde{x} + \tilde{\omega}(t)$ [illegible]

[illegible] $\tilde{M} = \tilde{M}(t)$ [illegible]

[illegible] $\tilde{\Omega} = \tilde{0}$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\tilde{\omega} = \operatorname{curl}(\tilde{V})$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

۱. ثابت کنید برای یک تغییر شکل کوچک در یک محیط پیوسته با تانسور کرنش $\mathbf{e}$ و چرخش $\boldsymbol{\omega}$، المان خط به طول ds، المان سطح به مساحت dA و المان حجم به حجم dV، روابط زیر برقرارند.

$\boldsymbol{\omega}\mathbf{e} + \mathbf{e}\boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\omega}$ $\alpha,\beta=1,2$

$\omega_{\alpha\beta}e_{\beta\beta} + e_{\alpha\beta}\omega_{\beta\beta} = (u_{\beta,\beta})\,\omega_{\alpha\beta}$

$\frac{\Delta ds}{ds} = e_{ij}M_iM_j$ ، $\Delta dA/dA = e_{ii} - e_{ij}N_iN_j$ و $\Delta dV/dV = e_{ii}$ $i,j=1,2,3$

به قسمی که رابطه‌ی اول در حالت دو بعدی برقرار است، آیا این رابطه در حالت سه بعدی نیز برقرار است؟ بقیه‌ی روابط چطور؟ $\mathbf{M}$ بردار یکه در راستای المان خط و $\mathbf{N}$ بردار یکه عمود بر dA می باشد.

۲. تغییر مکان نقطه‌ی B از یک محیط پیوسته برحسب تغییر مکان نقطه‌ی A بصورت $\mathbf{u}(B) = \mathbf{u}(A) + \int_A^B d\mathbf{u}$ قابل بیان است، با استفاده از رابطه‌ی انتگرالی اخیر، معادلات همسازی بین مؤلفه‌های کرنش را در تغییر شکلهای کوچک بدست آورید.

۳. اگر $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}$ تانسور گرادیان شتاب باشد و اگر λ اتساع المان خطی در راستای بردار یکه‌ی $\mathbf{m}$ باشد در اینصورت رابطه‌ی مقابل را اثبات کنید: $\ddot{\lambda}/\lambda = \dot{\mathbf{m}}^T\mathbf{L}\,\mathbf{m} + \mathbf{m}^T\mathbf{K}\,\mathbf{m}$.

۴. در رابطه‌ی زیر تابع $f(\mathbf{u},\mathbf{n})$ را بدست آورید.

$$\Pi = \int_R (2\mathbf{W}\mathbf{u} + \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{u})\,dv = \int_{\partial R} f(\mathbf{u},\mathbf{n})\,da$$

۵. اگر $\mathbf{N}$ بردار یکه عمود بر المان سطح dA در هیئت مرجع، $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر da در هیئت فعلی، $\mathbf{N}=\mathbf{M}$ بردار یکه عمود بر dA در هیئت مرجع یعنی در راستای المان مادی عمود بر dA در هیئت مرجع، $\mathbf{m}$ راستای المان خط در هیئت فعلی، مطلوبست ترسیم تغییرات کسینوس زاویه بین $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ برحسب $k=\alpha/\beta$ برای نقطه‌ی $(1,1,0)$ واقع بر سطح مادی $(X_1)^2+(X_2)^2+(X_3)^2=2$ در تغییر فرم $x_1=\alpha X_1$ ، $x_2=\beta X_2$ ، $x_3=\gamma X_3$. $\alpha,\beta,\gamma \geq 0$

۶. اگر $J=\det\mathbf{F}$ روابط زیر را اثبات کنید.

$$\frac{\partial J}{\partial F_{iA}} = J X_{A,i}\ ,\quad \frac{\dot{\overline{dv}}}{dv} = d_{ii}\ ,\quad \frac{\dot{\overline{da}}}{da} = d_{ii} - d_{ij}n_in_j\ ,\quad \frac{\dot{\overline{ds}}}{ds} = d_{ij}m_im_j$$

da المان سطح با نرمال $\mathbf{n}$، ds المان خط در راستای $\mathbf{m}$، dv المان حجم است.

۷. تابع برداری $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ را در نظر بگیرید. برای شار مادی $\int_{\partial R}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,da$ که ∂R سطح محدود کننده‌ی بدنه‌ی R می باشد، رابطه زیر را اثبات کنید و تابع برداری $\mathbf{g}$ را بدست آورید.

$$\frac{d}{dt}\int_{\partial R}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,da = \int_{\partial R}\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,da$$

۸. ثابت کنید در یک تغییر شکل کوچک از یک محیط پیوسته اگر $e_{ij}=0$ باشد در اینصورت ω_{ij} مقدار ثابتی است و کلی‌ترین شکل این تغییر فرم را می‌توان بصورت $u_i = c_{ij}x_j + a_i$ نوشت که c_{ij} یک تانسور پادمتقارن و $\mathbf{a}$ یک بردار ثابت است.

۹. اگر $\mathbf{U}$ تانسور راست اتساع، مثبت معین و یکنواخت فرض گردد $U_{AB,C}=0$ ، در اینصورت نتیجه بگیرید: $F_{iA,B}=0$ و $R_{iA,B}=0$ به عبارت دیگر اگر تانسور راست اتساع همگن باشد، تانسور دوران نیز همگن است. اگر به جای $\mathbf{U}$، $\mathbf{V}$ یکنواخت فرض شود چطور؟

۱. تانسور تنش در یک نقطه از یک محیط پیوسته بصورت زیر است: اولاً مقادیر تنشهای اصلی و جهات آنها را بدست آورید، ثانیاً مقادیر تنشهای اصلی انحرافی و جهات آنها را بدست آورید، ثالثاً تانسور تنش را در دستگاه مختصاتی که دارای بیشترین تنش برشی است بنویسید.

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +3 \end{pmatrix}$$

$T_{e'} = Q T Q^T$

$T_{اصلی} = R T_{اصلی}$ ... $\tau_{ماکزیمم}$

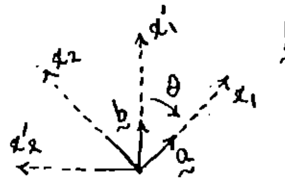
۲. یک کره بسیار کوچک در همسایگی یک نقطه مادی از یک محیط پیوسته با تانسور تنش $\underset{\sim}{T}$ در نظر بگیرید. اگر S مساحت سطح کره و σ_n تنش نرمال بر روی سطح کره باشد ثابت کنید

$$\sigma_m = \lim_{S \to 0} \left(\frac{1}{S} \iint_S \sigma_n \, ds\right) = \sigma_{oct} = \tfrac{1}{3} I_1$$

$\int t_{ij} n_i n_j \, ds = \int (t_{ij} n_i)_{,j} \, dV = \int t_{ij,j} n_i + t_{ij} n_{i,j} \quad n_i = \frac{x_i}{r} \quad n_{i,j} = \frac{\delta_{ij}}{r}$

۳. تغییر مکان نقطه B از یک محیط پیوسته برحسب تغییر مکان نقطه A بصورت $\underset{\sim}{u}(B) = \underset{\sim}{u}(A) + \int_A^B d\underset{\sim}{u}$ قابل بیان است؛ با استفاده از رابطه انتگرالی اخیر معادلات همسازی بین مؤلفه‌های کرنش در تغییر شکلهای کوچک را استخراج کنید.

۴. ثابت کنید تغییر زاویه بین دو خط مادی که جهتهای آنها در راستای بردارهای یکه $\underset{\sim}{a}$ و $\underset{\sim}{b}$ است، از رابطه زیر بدست می‌آید (در تئوری تغییر شکلهای کوچک با تانسور کرنش $\underset{\sim}{e}$)



$$\Delta\theta = \frac{1}{\sin\theta}\left[(a_i a_j + b_i b_j) e_{ij} \cos\theta - 2 e_{ij} a_i b_j\right]$$

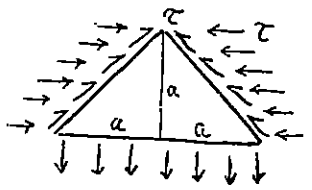
$$\Delta\theta = e_{12} - e'_{12} \qquad \cos\hat{\theta} = \cos(\theta + \Delta\theta)$$

۵. در یک تغییر شکل بسیار کوچک با تانسور کرنش $\underset{\sim}{e}$ برای یک المان حجم به حجم dv، یک المان سطح به مساحت da و یک المان خط به طول ds در نظر بگیرید. ثابت کنید:

$$\frac{\Delta dv}{dv} = e_{ii} \ , \quad \frac{\Delta da}{da} = e_{ii} - e_{ij} n_i n_j \ , \quad \frac{\Delta ds}{ds} = e_{ij} m_i m_j$$

به طوری که $\underset{\sim}{n}$ بردار یکه عمود بر سطح da، و $\underset{\sim}{m}$ بردار یکه در راستای المان خط است.

۶. ثابت کنید اگر در یک نقطه از یک جسم $tr\,\underset{\sim}{T} = I_1 = t_{ii} = 0$ در اینصورت حداقل در این نقطه سه سطح وجود دارد به طوری که بردارهای تنش در این نقطه بر این سطوح مماسند.



۷. المان مثلثی شکل مقابل را در نظر بگیرید؛ تانسور تنش دو بعدی در داخل این جسم را بدست آورید و سپس تنشهای اصلی و جهات آنها را معین کنید؛ ثانیاً تانسور تنش انحرافی را در دستگاه مختصاتی که دارای بیشترین تنش برشی است بنویسید.

۸. تانسور تنش در یک نقطه از یک جسم $\underset{\sim}{T}$ با مقادیر اصلی $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ است، از میان کلیه سطوحی که از این نقطه عبور می‌کنند، معادله سطحی را بدست آورید که بر ازای تنش نرمال $\sigma_n = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ بر روی آن سطح، دارای بیشترین تنش برشی باشد. همچنین مطلوب است معادله سطحی که دارای کمترین تنش برشی باشد؛ ثانیاً تانسور تنش را اگر $\underset{\sim}{T}$ و بردار ناشی از این تانسور تنش را $\underset{\sim}{t}$ بنامیم، ثابت کنید بردار $\underset{\sim}{t}$ بر روی یک بیضی‌گون قرار دارد.

۱. ثابت کنید جسم الاستیک خطی که دارای تقارن مادی حول یک محور مشخص است (برای سهولت محور تقارن را محور x_3 در نظر بگیرید) دارای ۵ ثابت مستقل است. تابع انرژی کرنشی برای چنین جسمی را بنویسید.

۲. جسمی از تقارن مکعبی برخوردار است یعنی علاوه بر ارتوتروپیک بودن محورهای x_1، x_2، x_3 نیز برای آن معادل هستند، ثابت کنید این جسم دارای ۳ ثابت مستقل است، تابع انرژی کرنشی و همچنین تانسور تنش را برحسب این ۳ ثابت حساب کنید. مدول الاستیسیتهٔ حجمی را نیز برحسب این ثابتها حساب کرده و معین کنید چه رابطه‌ای بین ثابتهای اخیر برقرار باشد تا کریستال مورد نظر کاملاً ایزوتروپیک باشد.

۳. اولاً ارتباط ناممتغیرهای تانسور تنش کرنشی t_{ij} را با ناممتغیرهای تانسور تنش انحرافی مشخص کنید، ثانیاً عبارتی برای تنش برشی بر صفحهٔ ۸ وجهی برحسب ناممتغیر دوم تانسور تنش انحرافی بنویسید.

۴. انرژی کرنشی در واحد حجم Σ برای یک جسم الاستیک عبارت است از $\Sigma = a_1 I_1 + a_2 I_2$ که a_1، a_2 اعداد ثابت و I_1، I_2 ناممتغیرهای اول و دوم $\underline{C}$ یا $\underline{B}$ هستند، معادله مشخصهٔ این جسم را برای تانسور تنش پیولای متقارن $\underline{S}$ بنویسید.

۵. اگر T_{ijkl} تانسور ایزوتروپیک مرتبه ۴ و A_{ij} تانسور متقارن مرتبه ۲ باشد، ثابت کنید تانسورهای $C_{ij} = T_{ijkl} A_{kl}$ و A_{ij} جهات اصلی مشترک دارند. چه ارتباطی بین مقادیر ویژهٔ C_{ij} و A_{ij} برقرار است؟ با استفاده از نتیجهٔ اخیر اگر e_i و σ_i به ترتیب کرنشهای اصلی و تنشهای اصلی در الاستیسیتهٔ خطی باشند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است.

۶. برای یک جسم الاستیک خطی ایزوتروپیک در تئوری صرفاً مکانیکی، معادلات همسازی برحسب تانسور تنش را که به معادلات Beltrami - Mitchell معروف هستند به شرح زیر برای مسائل الاستواستاتیکی استخراج کنید.

$$\nabla^2 \underline{T} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\, tr\,\underline{T} + \rho\left[\nabla \underline{b} + (\nabla \underline{b})^T\right] + \frac{\nu\rho}{1-\nu}\,\underline{I}\,\nabla\cdot\underline{b} = \underline{0}$$

۷. در تئوری ترمودینامیکی معادلات مشخصهٔ زیر را در نظر بگیرید و کلیهٔ محدودیتهای ضروری بر توابع فوق را با توجه به نامساوی کلازیوس - دوهم و عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی بدست آورید.

$$\eta = \hat{\eta}(\underline{F},\theta) \; ; \; \psi = \hat{\psi}(\underline{F},\theta) \; ; \; \underline{q} = \hat{\underline{q}}(\underline{F},\theta,\underline{g}) \; , \; \underline{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{F},\theta) + \hat{\underline{U}}(\underline{F},\theta)\underline{L}$$

۸. ابتدا ثابت کنید مجموعه ماتریسهای یکان مدولی $A = \{ \underline{H}\ st: \det \underline{H} = 1 \}$ تشکیل گروه می‌دهند و سپس نشان دهید اگر مادهٔ ساده‌ای نسبت به کل گروه تانسورهای یکان مدولی از ویژگی تقارن برخوردار باشد، در اینصورت مادهٔ مربوطه یک سیال است.

۹. برای یک جسم جامد ایزوتروپیک ترموالاستیک $\psi = \hat{\psi}(\underline{C},\theta) \rightarrow \psi(I_1, I_2, I_3)$، اگر $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ مقادیر تنشهای اصلی و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مقادیر اصلی اتساع باشند در اینصورت ثابت کنید:

$$\sigma_I = \rho \lambda_I \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_I} \qquad I = 1,2,3$$

مقادیر اصلی اتساع λ ← مربوط به U و V ⇐ λ^2 مربوط به C و B

مقادیر اصلی تنش ← متغیرهای ویژهٔ مربوط به T

⇐ رابطه ۲ — برای ترکیب B با C باید [illegible] مقادیر ویژه [illegible]

۱. جسم الاستیک خطی با معادله متشکله زیر ایزوتروپیک است $T_{ij} = C_{ijkl}\, e_{kl} - \beta_{ij}(\theta-\theta_0)$

اولاً مؤلفه‌های غیرصفر تانسورهای C_{ijkl} ، β_{ij} را تعیین کنید، ثانیاً انبساط آزاد یک المان حجم از این ماده را در نظر بگیرید و ثابت کنید $\Delta = ?$

$$\frac{dv-dV}{dV} = e_{kk} = (\theta-\theta_0)\, tr(C^{-1}\Delta)$$

به قسمی که $C = (C_{ij}) = (C_{iijj})$

۲. برای جسم جامد الاستیک خطی در تغییر شکلهای کوچک $\psi = \hat\psi(e_{ij}, \theta)$ ، محدودیتهای ضروری در معادله متشکله فوریر را با استفاده از نامساوی کلازیوس-دوهم استخراج کنید و بطور خاص نشان دهید اگر $\dot e_{ij} = 0$ در این صورت $-\frac{1}{\theta}\operatorname{div} q = \dots$ چنانچه گرمای ویژه در حجم ثابت C_v توسط رابطه $-\operatorname{div} q = \rho C_v \dot\theta$ ($\dot e_{ij} = 0$) تعریف شود، نشان دهید $C_v = -\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}$ ، اگر ارتباط بین تنش و کرنش و همچنین تنش و دما، خطی باشد، ψ به چه شکلی خواهد بود؟ برای جسم کاملاً ایزوتروپیک معادلات حاصله را ساده کنید.

۳. معادلات متشکله زیر را برای سیال غیرلزج در نظر بگیرید و با استفاده از نامساوی کلازیوس-دوهم، محدودیتهای ضروری در این معادلات را استخراج کنید

$q = -k\nabla\theta$, $T = \hat{T}(I_3, \theta)$; $I_3 = \det C$

$\eta = \hat\eta(I_3, \theta)$, $\psi = \hat\psi(I_3, \theta)$

۴. تانسور تنش کوشی برای یک جسم ویسکوالاستیک توسط معادله متشکله $T = \hat{T}(F, \dot F)$ بیان شده است؛ ثابت کنید $T = F\tilde{T}(E, F^T D F)F^T$ در حالت خاص زیر معادله را ساده کنید

$\tilde{T}(E, F^T D F) = \alpha_0\, tr E\, I + \alpha_1 E + \alpha_2 F^T D F \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 = cte \, , \quad \alpha_0 + \alpha_1 > 0$

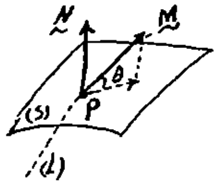
آیا این جسم ایزوتروپیک است؟ توضیح دهید. در حالت خاص فوق معادله متشکله برای تانسور تنش در تئوری خطی به چه شکلی خواهد شد؟ در این صورت معادلات تعادل در غیاب نیروی جسم را برای میدان تغییر مکان u بنویسید و ثابت کنید چنانچه تابع اسکالر φ در معادله‌ای به شکل زیر صدق کند $u = \operatorname{grad}\varphi$ حلی برای رسیدن به میدان تغییر مکان می‌باشد، ثابتهای p و k را پیدا کنید.

۵. یک سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی را در نظر بگیرید که داخل محفظه R که مرز آن ∂R ثابت است بدون حرکت می‌باشد جریان دارد، ثابت کنید نرخ اتلاف انرژی برای این سیال عبارت است از $D = \mu\int_R |\omega|^2 dv$ که μ ضریب لزجت و $\omega = \operatorname{curl} v$ بردار گردابی است.

۶. اولاً نشان دهید مجموعه g ، زیرگروهی از گروه تقارن خاص است. ثانیاً اگر تابع انرژی آزاد هلمهولتز برای ماده‌ای برابر $\psi(C, \theta) = \alpha_1(\theta) C_{11} + \alpha_2(\theta) C_{22}$ باشد. آیا این ماده تحت گروه فوق دارای تقارن است؟ آیا این ماده ایزوتروپیک است؟ توضیح دهید.

$$g = \left\{ I, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \right\}$$

۱. یک محیط پیوسته را در نظر بگیرید، در یک تغییر شکل کوچک از این محیط پیوسته، سطح مادی (S) با قائم یکه $\underline{N}$ و خط مادی (L) با راستای یکه $\underline{M}$ از نقطه P عبور می‌کنند، اگر تانسور کرنش در نقطه P از این محیط پیوسته $\underline{e}$ باشد، ثابت کنید تغییر زاویه برشی بین خط (L) و صفحه (S) در نقطه P از رابطه زیر بدست می‌آید



$$\Delta\theta = \tan\theta\,(\underline{N}\cdot\underline{e}\underline{N} - \underline{M}\cdot\underline{e}\underline{M})$$

$$\Delta\theta = \tan\theta\,(e_{ij}N_iN_j - e_{ij}M_iM_j)$$

سؤال: آیا می‌توانید $\Delta\theta$ را در حالتی که $\underline{M}=\underline{N}$ است بدست آورید؟

۲. در یک تغییر شکل بزرگ از یک محیط پیوسته، $\underline{D}$ تانسور نرخ تغییر فرم و $\underline{L}$ تانسور گرادیان سرعت است. اگر $\underline{m}$ بردار یکه در راستای المان خطی مادی مار بر نقطه P از این محیط پیوسته و $\underline{n}$ بردار یکه عمود بر سطح مادی مار بر نقطه P باشد در اینصورت اگر $\dot{\underline{m}}=\underline{A}\,\underline{m}$ و $\dot{\underline{n}}=\underline{B}\,\underline{n}$ باشد، ثابت کنید ماتریسهای تبدیل $\underline{A}$ و $\underline{B}$ عبارتند از: $\underline{A} = \underline{L} - (d_{ij}m_im_j)\underline{I}$ و $\underline{B} = (d_{ij}n_in_j)\underline{I} - \underline{L}^T$. اگر $\underline{m}$ و $\underline{n}$ در هیئت مرجع یعنی $\underline{M}$ و $\underline{N}$ بر یکدیگر منطبق باشند و θ زاویه بین $\underline{m}$ و $\underline{n}$ در هیئت فعلی باشد در اینصورت ثابت کنید نرخ تغییرات θ در هیئت فعلی عبارت است از

$$\dot{\theta} = -\cot\theta\,(d_{ij}n_in_j - d_{ij}m_im_j)$$

همچنین حد $\dot{\theta}$ را وقتی $t \to 0$ میل کند بدست آورید. $\lim_{t\to 0}\dot{\theta} = ?$

۳. ثابت کنید تابع انرژی ارتجاعی الاستیک خطی را می‌توان به دو جزء انرژی اعوجاجی و کروی بصورت $U_0 = U_0^s + U_0^d$ تفکیک کرد به قسمی که $U_0^d = \alpha S_{ij}S_{ij}$ ، $U_0^s = \beta\sigma_{rr}$ ، α و β را بدست آورید.

۴. ثابت کنید تابع انرژی ارتجاعی الاستیک خطی را در حالتی که تغییر درجه حرارت $\Delta\theta$ وجود دارد می‌توان بصورت زیر نوشت

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(e_{ij}e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}e_{rr}e_{ss}\right) + U_0^t \quad , \quad U_0^t = \tfrac{9}{2}(\alpha\Delta\theta)^2 - 3K\alpha\Delta\theta\, e_{rr}$$

۵. ثابت کنید در حالتی که $\nu = 0$ باشد در اینصورت قانون هوک بصورت $\sigma_{ij} = E e_{ij} = \frac{1}{2}E(u_{i,j}+u_{j,i})$ در می‌آید و سپس نشان دهید معادلات همسازی در این حالت عبارتند از $\sigma_{ij,ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii,jj}+\sigma_{jj,ii})$

۶. ثابت کنید در حالتی که $\nu = \frac{1}{2}$ باشد در اینصورت $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}$ و داریم: $\sigma_{ii,jj} = 0$

۷. در مسائل الاستیسیته خطی دو بعدی تنش، کرنش مسطح معادلات همسازی چند تا هستند، استخراج کرده و بر حسب مؤلفه‌های تنش بیان کنید.

۸. ثابت کنید تنشهای متناظر با نیروی فرضی $d\underline{f}$ به قسمی که $d\underline{f} = \underline{F}^{-1}d\underline{F}$ در هیئت مرجع، تنشهای دوم پیولا-کیرشهف هستند.

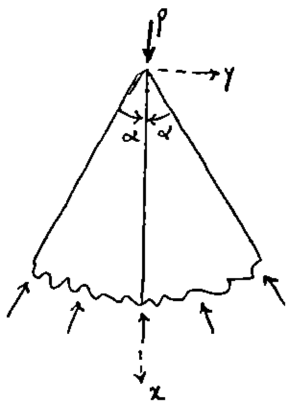
۱. معادلات دیفرانسیل تعادل را در دستگاه مختصات کروی برحسب مؤلفه‌های فیزیکی تنش در این دستگاه، بدست آورید.

۲. یک کره توخالی را در نظر بگیرید که شعاع داخلی آن r_i و شعاع خارجی آن r_o می‌باشد. الف) اگر درجه حرارت این کره به اندازه ΔT تغییر کند مطلوبست محاسبه سیستم تنشهای داخلی و همچنین میدان جابجایی (u_r)؛ ب) اگر فشار داخلی P_i و فشار خارجی P_o، تراکنشهای مرزی این کره باشند، در این صورت تنشهای داخلی و میدان جابجایی را بدست آورید.

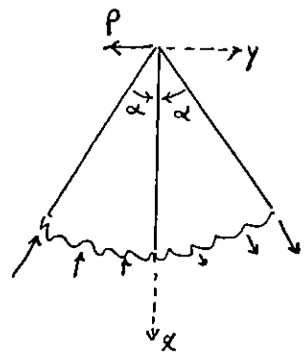
۳. یک استوانه جدار ضخیم به طول دلخواه را در نظر بگیرید به طوری که r_i شعاع داخلی، r_o شعاع خارجی این استوانه باشند.
الف) اگر درجه حرارت این استوانه به اندازه ΔT افزایش یابد مطلوبست محاسبه سیستم تنشهای داخلی و میدان جابجایی.
ب) اگر P_i فشار داخلی و P_o فشار خارجی این استوانه باشد ثابت کنید $\tau_{r\theta} = 0$ و σ_r، σ_θ عبارتند از

$$\sigma_r = -\frac{r_o^2 P_o - r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(P_o - P_i)\, r_o^2 r_i^2}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad , \quad \sigma_\theta = -\frac{r_o^2 P_o - r_i^2 P_i}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(P_o - P_i)\, r_o^2 r_i^2}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)}$$

همچنین میدان جابجایی (u_r) را در این حالت بدست آورید.
ج) اگر این استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول مرکزش در حال چرخش باشد، سیستم تنشهای داخلی و همچنین میدان جابجایی (u_r) را بدست آورید.

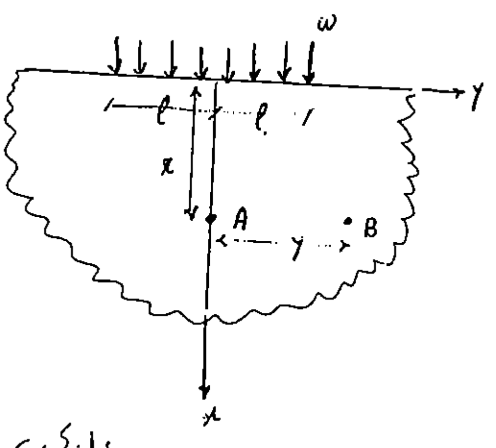


$\sigma_r = \frac{c}{r}\cos\theta$
$\sigma_\theta = 0$
$\tau_{r\theta} = 0$



$\sigma_r = \frac{c}{r}\sin\theta$
$\sigma_\theta = 0$
$\tau_{r\theta} = 0$

ج ۴. گوه مقابل را در دو حالت مختلف بارگذاری در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه ضریب c در هر دو حالت بارگذاری. زاویه θ نسبت به محور x بدست می‌آید.



ج ۵. با استفاده از نتیجه بدست آمده از مسئله ۴، تانسور تنش را در دستگاه مختصات دکارتی xy در نقطه A از محیط نیمه بینهایت مقابل بدست آورید. همچنین تانسور تنش را در نقطه B به مختصات (x, y) در دستگاه مختصات دکارتی xy بدست آورید.

۶. مطلوبست استخراج معادلات تعادل در دستگاه مختصات x_1x_2 که با یکدیگر زاویه θ می‌سازند، برحسب مؤلفه‌های فیزیکی تنش در این دستگاه مختصات.