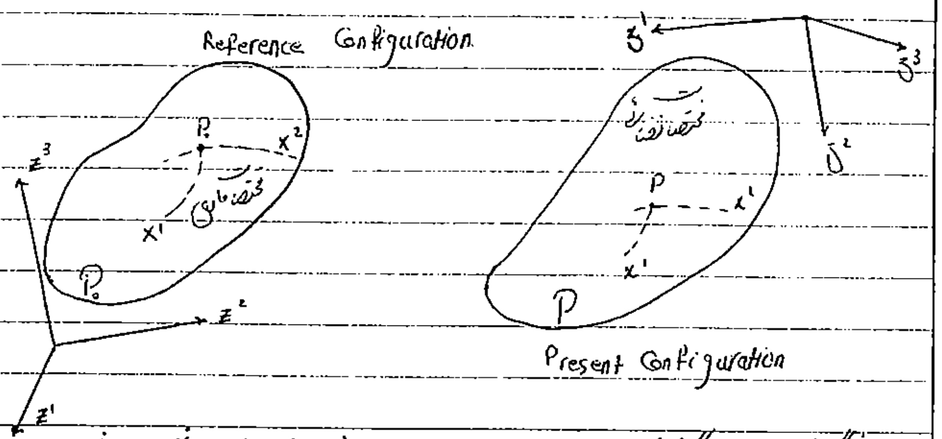
مقدمه

! صرف‌نظر از گسستگی در محیط مادی مانند پیوستگی اعداد حقیقی.



گذشت از دستگاه X^A به x^i : $x^i = \chi^i(X^1, X^2, X^3, t)$

حال در هر دو هیئت مرجع و فعلی می‌توان تغییر دستگاه مختصات را به قسمی که

$$\bar{X}^A = \bar{X}^A(X^1, X^2, X^3) \quad , \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$$

$$X^A = X^A(\bar{X}^1, \bar{X}^2, \bar{X}^3) \quad , \quad x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$$

تانسورهای دونقطه‌ای "Two-point Tensors"

تانسور F که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود: تانسور گرادیان تغییر مکان نامیده می‌شود

$$F^i_{.A} \triangleq \frac{\partial x^i}{\partial X^A}$$

$$\bar{F}^i_{.A} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{X}^A}$$

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\left(\chi^1(X^1,X^2,X^3,t),\ \chi^2(X^1,X^2,X^3,t),\ \chi^3(X^1,X^2,X^3,t)\right)$$

$$= \bar{x}^i\left(\chi^1\left(X^1(\bar{X}^1,\bar{X}^2,\bar{X}^3),\ X^2(\bar{X}^1,\bar{X}^2,\bar{X}^3),\ X^3(\bar{X}^1,\bar{X}^2,\bar{X}^3),\ t\right),\ \chi^2(\dots),\ \chi^3(\dots)\right)$$

$$= \bar{\chi}^i(\bar{X}^1,\bar{X}^2,\bar{X}^3,t)$$

$$\bar{F}^i_{\cdot A} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{X}^A} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{X}^A} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial X^M}\cdot\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^A}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^A}\cdot F^k_{\cdot M}$$

تانسور فوق در واقع تانسور دو نقطه‌ای است زیرا به دو نقطه در دو فضا ارجاع می‌شود.

$\mathscr{L}:\ \bar{X}^A = X^A \quad \therefore\ \bar{F}^i_{\cdot A} = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} F^k_{\cdot A}$ برابر با دوران

$\mathscr{L}:\ \bar{x}^k = x^k \quad \therefore\ \bar{F}^i_{\cdot A} = \dfrac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^A} F^i_{\cdot M}$ برابر هم دوران

نتیجه: تانسور گرادیان نیز یک تانسور دو نقطه‌ای است.

$G_{AB} = \underset{\sim}{G}_A \cdot \underset{\sim}{G}_B$ تانسور متریک در هیئت مرجع

$g_{ij} = \underset{\sim}{g}_i \cdot \underset{\sim}{g}_j$ تانسور متریک در هیئت فعلی

$$\underset{\sim}{F} = F^i_{\cdot A}\ \underset{\sim}{g}_i \otimes \underset{\sim}{G}^A$$

$$F_{iA} = g_{ij} F^j_{\cdot A}\quad,\quad F^{iA} = G^{AB} F^i_{\cdot B}$$

$$\underset{\sim}{F} = F_{iA}\ \underset{\sim}{g}^i \otimes \underset{\sim}{G}^A = F^{iA}\ \underset{\sim}{g}_i \otimes \underset{\sim}{G}_A$$

از جمله تانسورهای دو نقطه‌ای دیگر به Shifter می‌توان اشاره کرد

$\underset{\sim}{P} = P^L \underset{\sim}{G}_L$

$\underset{\sim}{P} = p^l \underset{\sim}{g}_l \qquad P_L = \underset{\sim}{P}\cdot \underset{\sim}{G}_L$

$\therefore\ P_L = p_k\ \underset{\sim}{g}^k \cdot \underset{\sim}{G}_L$

$g^k_{\cdot K} \triangleq \underset{\sim}{g}^k \cdot \underset{\sim}{G}_K$: Shifter

$\therefore\ P_K = g^k_{\cdot K}\ p_k$

$g_K^{\cdot k} = \underset{\sim}{G}_K \cdot \underset{\sim}{g}^k = g^k_{\cdot K} \Rightarrow$

$$g_{kK} = \underset{\sim}{g}_k \cdot \underset{\sim}{G}_K = g_{Kk}$$

$$g^{kK} = \underset{\sim}{g}^k \cdot \underset{\sim}{G}^K = g^{Kk}$$

تجزیه قطبی

$\underset{\sim}{x} = \chi(\underset{\sim}{X}, t) \qquad x^i = \chi^i(X^A, t)$

$dx^i = F^i_{\cdot A}\, dX^A \qquad d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F} \cdot d\underset{\sim}{X}$

$F^i_{\cdot A} = \dfrac{\partial x^i}{\partial X^A} \qquad 0 < \det F < \infty$

$(F^{-1})^A_{\cdot i} = \dfrac{\partial X^A}{\partial x^i} \qquad 0 < \det F^{-1} < \infty$

Polar Decomposition Thm · $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} \cdot \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{R}$

R: متعامد و $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$ متقارن مثبت معین هستند. $\underset{\sim}{R}$ را تانسور دوران و $\underset{\sim}{U}$ را تانسور راست اتساع (Right Stretch) و V را تانسور چپ اتساع (Left Stretch) گوئیم.

$F^i_{\cdot B} = R^i_{\cdot A} \cdot U^A_{\cdot B} = V^i_{\cdot j}\, R^j_{\cdot B}$

$R^i_{\cdot A}\, R_j^{\cdot A} = \delta^i_j \qquad \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^T = \underset{\sim}{I} \ , \ \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}$

$R_{iA}\, R_j^{\cdot A} = g_{ij} \qquad R^i_{\cdot A}\, R_i^{\cdot B} = \delta^B_A$

$R^i_{\cdot A}\, R^{jA} = g^{ij} \qquad R^i_{\cdot A}\, R_{iB} = G_{AB}$

چنانچه دستگاه‌های مختصات کارتزین باشند، شیفتر (انتقال دهنده) عبارتند از :

$\underset{\sim}{I}_k \cdot \underset{\sim}{i}_k = \underset{\sim}{I}_k \cdot \underset{\sim}{i}^k$

$\underset{\sim}{I}^k \cdot \underset{\sim}{i}_k = \underset{\sim}{I}^k \cdot \underset{\sim}{i}^k$

چنانچه دستگاه‌های مختصات کارتزین و با هم موازی باشند داریم :

$\underset{\sim}{I}_1 = \underset{\sim}{i}_1$

$\therefore\ g_{kk} = g^k_{\cdot k} = \delta_{kk}$

مشتق هموردای جزئی Partial Covariant Derivatives

مشتق هموردای نسبت به مختصات فضایی $F^p_{\cdot N|q}$ یا مشتق هموردای نسبت به مختصات مرجع $F^p_{\cdot N|R}$

$F^p_{\cdot N|R} = \dfrac{\partial F^p_{\cdot N}}{\partial X^R} - \left\{ {P \atop NR} \right\} F^p_{\cdot P}$

$F^p_{\cdot N|q} = \dfrac{\partial F^p_{\cdot N}}{\partial x^q} + \left\{ {p \atop mq} \right\} F^m_{\cdot N}$

مشتق هموردای کلی Total Covariant Derivatives

$\delta_R\, F^p_{\cdot N} = F^p_{\cdot N|R} + F^p_{\cdot N|q}\, \dfrac{\partial x^q}{\partial X^R}$ ؟؟؟

$\delta_R\, F^p_{\cdot N} = F^p_{\cdot N;R} + \left\{ {p \atop rs} \right\} F^r_{\cdot N}\, \dfrac{\partial x^s}{\partial X^R}$

تغییر تجزیه قطبی

$$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}\, d\underset{\sim}{X}$$

$$d\bar{X}^A = U^A_B\, dX^B$$

$$dx^i = R^i_{\cdot A}\, d\bar{X}^A$$

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$$

$$dS^2 = G_{AB}\, dX^A dX^B \qquad d\bar{S}^2 = G_{AB}\, d\bar{X}^A d\bar{X}^B$$

$$ds^2 = g_{ij}\, (R^i_{\cdot A}\, d\bar{X}^A)(R^j_{\cdot B}\, d\bar{X}^B)$$

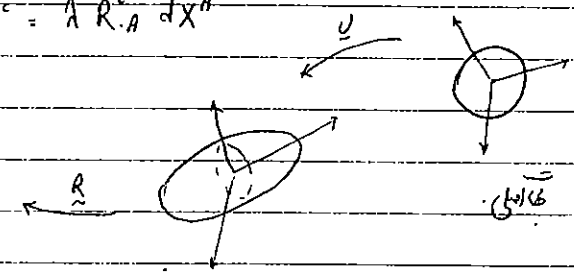
$$= g_{ij} R^i_{\cdot A} R^j_{\cdot B}\, d\bar{X}^A d\bar{X}^B$$

$$= G_{AB}\, d\bar{X}^A d\bar{X}^B = d\bar{S}^2$$

با توجه به متقارن بودن $\underset{\sim}{U}$، تانسور $\underset{\sim}{U}$ حداقل دارای سه جهت ویژه (در عمود هم) است. حال چنانچه $d\underset{\sim}{X}$ در راستای جهت اصلی $\underset{\sim}{U}$ انتخاب شود، مقدار ویژه $\underset{\sim}{U}$ نظیر این جهت را λ بنامیم در اینصورت:

$$d\bar{X}^A = U^A_B\, dX^B = \lambda\, dX^A$$

$$dx^i = \lambda R^i_{\cdot A}\, dX^A$$



$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مقادیر ویژه $\underset{\sim}{U}$ را مقادیر اصلی اتساع گوییم.

$$dx^i = F^i_{\cdot A}\, dX^A = V^i_j R^j_{\cdot A}\, dX^A$$

اگر dX^A در راستای بردار ویژه U باشد

$$dx^i = \lambda R^i_{\cdot A}\, dX^A = V^i_j R^j_{\cdot A}\, dX^A$$

$$= \lambda\, d\bar{x}^i = V^i_j\, d\bar{x}^j$$

لذا λ مقدار ویژه $\underset{\sim}{V}$ نیز هست، یعنی مقادیر ویژه $\underset{\sim}{U}$ و $\underset{\sim}{V}$ یکی هستند و $d\bar{x} = \underset{\sim}{R}\, d\underset{\sim}{X}$ جهت اصلی V می‌باشد.

تانسور راست تغییر فرم "کوشی گرین" $\underset{\sim}{C} \triangleq \underset{\sim}{U}^2$ تانسور راست تغییر فرم

تانسور چپ تغییر فرم $\underset{\sim}{B} \triangleq \underset{\sim}{V}^2$

$$C_{AB} = U^M_A\, U_{MB} = C_{BA}$$

$$B_{ij} = V^k_i\, V_{kj} = B_{ji}$$

$$dS^2 = G_{AB}\, dX^A dX^B$$

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = g_{ij} \left(\frac{\partial x^i}{\partial X^A} dX^A\right)\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^B} dX^B\right)$$

$$= g_{ij} F^i_{\cdot A} F^j_{\cdot B}\, dX^A dX^B = g_{ij} (R^i_{\cdot M} U^M_A)(R^j_{\cdot N} U^N_B)\, dX^A dX^B$$

$$= (g_{ij} R^i_{\cdot M} R^j_{\cdot N})\, U^M_A U^N_B\, dX^A dX^B$$

$$= G_{MN} U^M_A U^N_B\, dX^A dX^B = U^M_A U_{MB}\, dX^A dX^B$$

$$= C_{AB}\, dX^A dX^B$$

و بالعکس:

$$dS^2 = G_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j} dx^i dx^j$$

$$= G_{AB} (F^{-1})^A_{\ .i} (F^{-1})^B_{\ .j} dx^i dx^j$$

$$= B^{-1}_{ij} dx^i dx^j$$

$$B_{ij} = F_{iA} F_j^{\ A}$$

$$= (V_{ik} R^k_{\ .A})(V_{jm} R^{mA})$$

$$= g^{km} V_{ik} V_{jm} = V_i^{\ m} V_{mj}$$

$$B = FF^T , \quad C = F^T F$$

با توجه به اینکه $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T$ ثابت کنید $G_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j}$ معکوس $\underset{\sim}{B}$ می‌باشد.

- تانسورهای با اندیس بزرگ تانسورهای لاگرانژی هستند، تانسورهای با اندیس کوچک
- تانسورهای اویلری هستند.

مقادیر ویژهٔ $\underset{\sim}{B}$ و $\underset{\sim}{C}$ با یکدیگر مساوی بوده و برابر با λ_1^2 ، λ_2^2 ، λ_3^2 می‌باشند.
بردارهای ویژهٔ $\underset{\sim}{B}$ بر $\underset{\sim}{V}$ و بردارهای ویژهٔ $\underset{\sim}{C}$ بر $\underset{\sim}{U}$ منطبقند.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr\,\underset{\sim}{B} = tr\,\underset{\sim}{C} = B^k_k = C^A_A$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 = \tfrac{1}{2}((tr\,\underset{\sim}{B})^2 - tr\,\underset{\sim}{B}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}((tr\,\underset{\sim}{C})^2 - tr\,C^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}((B^k_k B^m_m) - B^k_m B^m_k)$$

$$= \tfrac{1}{2}(C^A_A C^B_B - C^A_B C^B_A)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \det \underset{\sim}{B} = \det \underset{\sim}{C}$$

$$d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}$$

$$dx^i = F^i_{\cdot A}\, dX^A = \frac{\partial x^i}{\partial X^A}\, dX^A$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{U}^2$$

$$C_{AB} = g_{ij}\, F^i_{\cdot A} F^j_{\cdot B}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{V}^2$$

$$B^{ij} = G^{AB} F^i_{\cdot A} F^j_{\cdot B} \qquad B^{-1}_{ij} = G_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j}$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{x} = g_{ij}\, dx^i dx^j = C_{AB}\, dX^A dX^B = d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{C}\, d\underset{\sim}{X}$$

$$dS^2 = d\underset{\sim}{X} \cdot d\underset{\sim}{X} = G_{AB}\, dX^A dX^B = B^{-1}_{ij}\, dx^i dx^j = d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{B}^{-1}\, d\underset{\sim}{x}$$

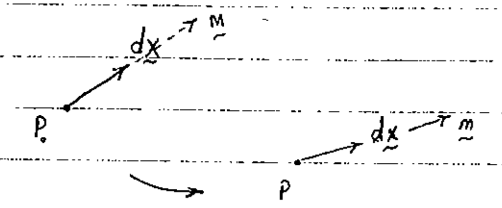
در دستگاه مختص دکارتی:

$$g_{ij} = \delta_{ij} \qquad G_{AB} = \delta_{AB}$$

$$C_{AB} = x^i_{,A}\, x^i_{,B} = x_{i,A}\, x_{i,B}$$

$$B^{-1}_{ij} = X^A_{,i}\, X^A_{,j} = X_{A,i}\, X_{A,j}$$

بررسی المان خطی در فرآیند تغییر شکل



(اتساع) Strech $\triangleq \dfrac{ds}{dS}$

$$\begin{cases} d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{M}\, dS \\ G_{AB} M^A M^B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{m} \cdot ds \\ g_{ij}\, m^i m^j = 1 \end{cases}$$

$$dx^i = m^i ds = x^i_{,A}\, dX^A = x^i_{,A} M^A dS$$

$$\therefore\ m^i \lambda = x^i_{,A} M^A$$

$$\underset{\sim}{m} = \frac{1}{\lambda} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{M}$$

مقدار λ بصورت زیر بدست می آید:

$$g_{ij}\, m^i m^j \lambda^2 = g_{ij}\, x^i_{,A}\, x^j_{,B}\, M^A M^B$$

$$\lambda^2 = C_{AB} M^A M^B = \underset{\sim}{M} \cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}$$

$$\underset{\sim}{m} = \frac{\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{M}}{\sqrt{\underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}}}$$

بطور برعکس داریم:

$$d\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{M}\, dS$$

$$dX^A = M^A dS = \frac{\partial X^A}{\partial x^i} dx^i$$

$$dX^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^i} m^i \, ds$$

حال با توجه به یکه بودن بردار $\underline{M}$ داریم:

$$G_{AB} M^A M^B = 1$$

$$G_{AB} M^A M^B \frac{1}{\lambda^2} = G_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \frac{\partial X^B}{\partial x^j} m^i m^j$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = B^{-1}_{ij} m^i m^j = \underline{m}\,\underline{B}^{-1}\underline{m}$$

$$\underline{M} \frac{1}{\lambda} = \underline{F}^{-1} \underline{m} \quad \therefore \quad \underline{M} = \frac{\underline{F}^{-1}\underline{m}}{\sqrt{\underline{m}\,\underline{B}^{-1}\underline{m}}}$$

"حرکت صلب"

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{x}(t) = \underline{Q}(t)(\underline{X} - \underline{X}_0) + \underline{x}_0(t)$$

$$\underline{Q}(t) \cdot \underline{Q}^T(t) = \underline{I}$$

رابطهٔ فوق مبین یک حرکت صلب است.

$$\underline{F}(\underline{X}, t) = \underline{Q}(t)$$

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{Q}^T \cdot \underline{Q} = \underline{I}$$

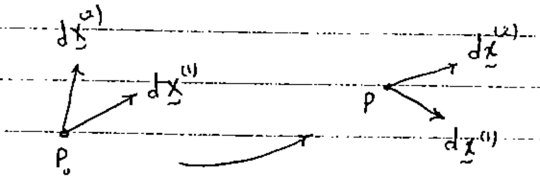
$$\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^T = \underline{I}$$

$$\underline{U} = \underline{V} = \underline{I}, \quad \underline{R} = \underline{Q}$$

کرنش گرین - لاگرانژ

روابط فوق در واقع فلسفهٔ تعریف تانسور کرنش هستند، بعنوان مثال تانسور کرنش گرین:

$$\underline{E} \triangleq \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I}) = \underline{E}(\underline{X}, t)$$



$$d\underline{x}^{(1)} \cdot d\underline{x}^{(2)} - d\underline{X}^{(1)} d\underline{X}^{(2)} = \underline{F} \cdot d\underline{X}^{(1)} \cdot \underline{F}\, d\underline{X}^{(2)} - d\underline{X}^{(1)} \cdot d\underline{X}^{(2)}$$

با توجه به تعریف ترانهاده‌ی یک تانسور:

$$\boxed{\begin{array}{l} (\underline{A} \cdot \underline{a}) \cdot (\underline{B}\,\underline{b}) = \underline{a} \cdot \underline{A}^T \underline{B}\,\underline{b} \\ \underline{A}\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{A}^T \underline{b} \end{array}}$$

$$= d\underline{X}^{(1)} \cdot \underline{F}^T \underline{F}\, d\underline{X}^{(2)} - d\underline{X}^{(1)} \cdot d\underline{X}^{(2)}$$

$$= d\underline{X}^{(1)} \cdot (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I})\, d\underline{X}^{(2)} = 2\, d\underline{X}^{(1)} \cdot \underline{E} \cdot d\underline{X}^{(2)}$$

$$= 2 E_{AB}\, dX^A_{(1)}\, dX^B_{(2)}$$

$$Extension \triangleq \varepsilon \triangleq \frac{ds - dS}{dS}$$

$$\varepsilon = \lambda - 1$$

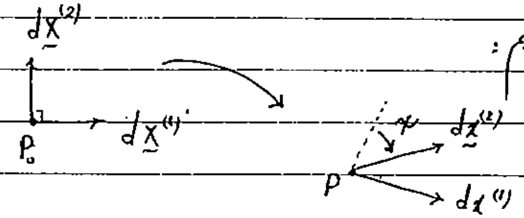
$$\varepsilon = \sqrt{\underset{\sim}{M} \cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}} - 1$$

$$(\varepsilon + 1)^2 = \underset{\sim}{M} \cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}\,(2\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{I})\,\underset{\sim}{M}$$

$$= 2\,\underset{\sim}{M} \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{M} + 1$$

$$\varepsilon + \varepsilon^2/2 = \underset{\sim}{M} \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{M}$$

حال به بررسی تغییر زاویه می‌پردازیم:



$$d\underset{\sim}{X}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{X}^{(2)} = 0$$

$$d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} = dS_{(1)} \cdot dS_{(2)} \; \sin\gamma$$

$$= d\underset{\sim}{X}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{C}\, d\underset{\sim}{X}^{(2)}$$

$$= dS_{(1)} \cdot dS_{(2)} \; \underset{\sim}{M}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}^{(2)}$$

$$\therefore \; \lambda_1 \lambda_2 \sin\gamma = \underset{\sim}{M}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{M}^{(2)} = 2\,\underset{\sim}{M}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{M}^{(2)}$$

$$\therefore \; \sin\gamma = \frac{2\,\underset{\sim}{M}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{M}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\underset{\sim}{M}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{M}^{(1)}}\;\sqrt{1 + 2\underset{\sim}{M}^{(2)} \cdot \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{M}^{(2)}}}$$

تانسور کرنش گرین لاگرانژ یک تانسور لاگرانژی است که به بیان دیگر یک تانسور مادی است (material tensor).

کرنش الماسی

کرنش الماسی یک کرنش اویلری است.

$$d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} - d\underset{\sim}{X}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{X}^{(2)} = d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} - \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x}^{(2)}$$

$$= d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} - d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x}^{(2)}$$

$$= d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \left(\underset{\sim}{I} - (\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^{T})^{-1} \right) d\underset{\sim}{x}^{(2)}$$

$$= d\underset{\sim}{x}^{(1)} \left(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1} \right) d\underset{\sim}{x}^{(2)} = 2\, d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{e}\, d\underset{\sim}{x}^{(2)}$$

Almansi Strain Tensor $\underset{\sim}{e} \triangleq 1/2\,(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1})$

$$ds^2 - dS^2 = 2\,d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{E}\, d\underset{\sim}{X} = 2\,d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{e}\, d\underset{\sim}{x}$$

$$= 2E_{AB}\, dX^A dX^B = 2e_{ij}\, dx^i dx^j$$

تانسورهای کرنش گرین و الماسی با تمرکز بر روی یک خط مادی بدست آمدند.

با تمرکز بر روی سطوح مادی تانسورهای کرنش دیگر تعریف می‌شوند

تانسور کرنش پیولا $= 1/2\,(\underset{\sim}{C}^{-1} - \underset{\sim}{I})$ Piola

تانسور کرنش فینگر $= 1/2\,(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B})$ Finger

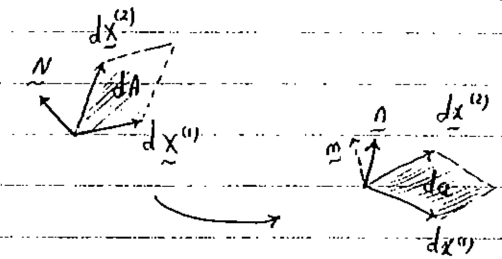
بررسی المان سطح در فرایند تغییر شکل

$$J = \det \underset{\sim}{F} \qquad 0 < J < \infty$$

$$\mathcal{E}_{ABC}\, J = \mathcal{E}_{ijk}\, x^i_{,A}\, x^j_{,B}\, x^k_{,C}$$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{ijk} = \sqrt{g}\, e_{ijk} \\ \mathcal{E}_{ABC} = \sqrt{G}\, e_{ABC} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{E}^{ijk} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\, e^{ijk} \\ \mathcal{E}^{ABC} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\, e^{ABC} \end{cases}$$

المان سطح را در نظر بگیرید :



$$d\underset{\sim}{X}^{(1)} \times d\underset{\sim}{X}^{(2)} = dA\, \underset{\sim}{N}$$

$$d\underset{\sim}{x}^{(1)} \times d\underset{\sim}{x}^{(2)} = da\, \underset{\sim}{n}$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\, dx^j_{(1)}\, dx^k_{(2)} = da\, n_i$$

$$\mathcal{E}_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial X^M} dX^M_{(1)} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial X^N} dX^N_{(2)} = da\, n_i$$

$$\mathcal{E}_{ijk}\, x^j_{,M}\, x^k_{,N}\, dX^M_{(1)}\, dX^N_{(2)} = da\, n_i$$

$$\mathcal{E}_{AMN}\, X^A_{,i}\, J\, dX^M_{(1)}\, dX^N_{(2)} = da\, n_i$$

$$\therefore \quad J\, X^A_{,i}\, dA\, N_A = da\, n_i$$

$$g^{ij} n_i n_j = 1$$

$$J^2 (dA)^2 g^{ij} X^A_{,i} X^B_{,j} N_A N_B = (da)^2$$

$$\frac{1}{J}\frac{da}{dA} = \sqrt{\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{N}}$$

$$\therefore \underset{\sim}{n} = \frac{\underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}}{\frac{1}{J}\frac{da}{dA}} = \frac{\underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}}{\sqrt{\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{N}}}$$

مخرج کسر برابر با طول بردار موجود در صورت کسر است.

$$\| \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N} \| = \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{F}^{-T} \underset{\sim}{N}$$

$$= \underset{\sim}{N} \cdot (F^T F)^{-1} \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{N}$$

$$J\, dA\, X^K_{,i} N_K = da\, n_i$$

$$J\, dA\, N_K = x^i_{,K}\, da\, n_i \qquad J\, dA\, \underset{\sim}{N} = da\, \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n}$$

$$\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{N} = 1$$

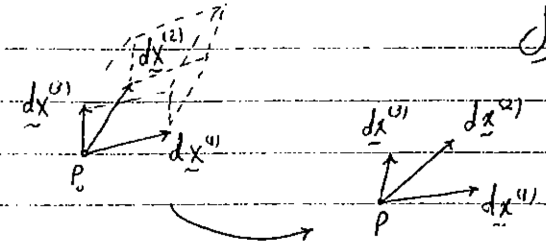
$$J^2 (dA)^2 = (da)^2\, \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n}$$

$$= (da)^2\, \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{F} \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n} = (da)^2\, \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{n}$$

$$J \frac{dA}{da} = \sqrt{\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{n}} = \sqrt{B_{ij} n^i n^j} = \sqrt{B^{ij} n_i n_j}$$

$$\therefore \quad \underset{\sim}{N} = \frac{\underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{n}}{\sqrt{\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{n}}} \qquad \frac{dA}{da} = \frac{1}{J} \sqrt{\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{n}}$$

بررسی المان حجم در فرآیند تغییر شکل



$$dV = d\underset{\sim}{X}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{X}^{(2)} \times d\underset{\sim}{X}^{(1)}$$
$$= \varepsilon_{ABC}\, dX^A_{(1)}\, dX^B_{(2)}\, dX^C_{(3)}$$

$$dv = d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} \times d\underset{\sim}{x}^{(3)} = \varepsilon_{ijk}\, dx^i_{(1)}\, dx^j_{(2)}\, dx^k_{(3)}$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,(x^i_{,A}\, dX^A_{(1)})(x^j_{,B}\, dX^B_{(2)})(x^k_{,C}\, dX^C_{(3)})$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, x^i_{,A}\, x^j_{,B}\, x^k_{,C}\; dX^A_{(1)}\, dX^B_{(2)}\, dX^C_{(3)}$$
$$= J\, \varepsilon_{ABC}\, dX^A_{(1)}\, dX^B_{(2)}\, dX^C_{(3)}$$
$$= J\, dV$$

$$\therefore \quad dv = J\, dV$$

در بخش کرنش‌ها بدین ترتیب داریم :

$$\underset{\sim}{P} \triangleq \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{C}^{-1} - \underset{\sim}{I}) \qquad \frac{da^2 - J^2 dA^2}{2J^2 dA^2} = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{N}$$

$$\underset{\sim}{e} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}) \qquad \frac{da^2 - J^2 dA^2}{2da^2} = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{e}\, \underset{\sim}{n}$$

$$\rho\, d\underset{\sim}{a}_{(1)} \cdot \rho\, d\underset{\sim}{a}_{(2)} - \rho_0\, d\underset{\sim}{A}_{(1)} \cdot \rho_0\, d\underset{\sim}{A}_{(2)} = \begin{cases} 2\rho_0^2\, d\underset{\sim}{A}_{(1)}\, \underset{\sim}{P}\, d\underset{\sim}{A}_{(2)} \\ 2\rho^2\, d\underset{\sim}{a}_{(1)}\, \underset{\sim}{e}\, d\underset{\sim}{a}_{(2)} \end{cases}$$

مشتق مادی "Material Derivative"

اگر f یک ویژگی باشد که به ذره نسبت داده شده است.

$$f = \hat{f}(\underset{\sim}{X}, t) \quad , \quad \underset{\sim}{X} = \chi^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$$
$$= \tilde{f}(\underset{\sim}{x}, t)$$

$\hat{f}(\underset{\sim}{X},t)$ بیان لاگرانژی ویژگی f و $\tilde{f}(\underset{\sim}{x},t)$ بیان فضایی یا اویلری f هستند.

$$\text{مشتق مادی}\ \dot{f} = \left.\frac{\partial \hat{f}(\underset{\sim}{X},t)}{\partial t}\right)_{\underset{\sim}{X}}$$

$$\dot{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

v^i نیز امکان دارد بیان مرجعی و یا بیان اویلری را داشته باشد. لذا اگر خود v^i را به عنوان یک ویژگی که به ذره نسبت داده شده است در نظر بگیریم:

$$v^i = \tilde{v}^i(\underset{\sim}{x}, t) = \hat{v}^i(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$a^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial t}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$a^i = \tilde{v}^i|_j\, v^j + \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial t} \quad , \quad \tilde{v}^i|_j = \frac{\partial \tilde{v}^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \tilde{v}^k$$

حال به بررسی مشتقات مادی ویژگی‌های ذرات در فرآیند تغییر شکل می‌پردازیم.

$$\star\quad \dot{F}^i_{\ A} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial x^i(\underset{\sim}{X},t)}{\partial X^A}\right] = v^i_{\ ,A} = \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial X^A}$$

$$= \bar{v}^i{}_{|j}\,\frac{\partial x^j}{\partial X^A} = v^i{}_{|j}\,F^j_{\ A}$$

زیرا $v^i{}_{|j}$ تانسور گرادیان سرعت نامیده می‌شود و آنرا با نماد L^i_j نمایش می‌دهند

$$L_{ij} = v_{i|j} \qquad \underset{\sim}{L} = \nabla \underset{\sim}{v}$$

$$\therefore\ \dot{\underset{\sim}{F}} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{F}$$

ماتریس L یا تانسور L را می‌توان به دو جزء تقسیم کرد

$$\underset{\sim}{L} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}+\underset{\sim}{L}^T) + \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}-\underset{\sim}{L}^T) = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W}$$

Rate of Deformation Tensor $\underset{\sim}{D} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}+\underset{\sim}{L}^T)$ تانسور نرخ تغییر شکل

Vorticity Tensor $\underset{\sim}{W} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}-\underset{\sim}{L}^T)$ تانسور گردابی

$$\star\quad \lambda m^i = x^i_{\ ,A} M^A$$

$$\dot{\lambda} m^i + \lambda \dot{m}^i = v^i{}_{|j}\, x^j_{\ ,A} M^A = \lambda v^i{}_{|j} m^j$$

حال از طرفین رابطه ا مقابل مشتق مادی می‌گیریم:

$$m_i m^i = 1$$

$$\dot{m}^i m_i + m^i \dot{m}_i = 0$$

$$\dot{m}^i m_i = 0$$

با توجه به رابطه فوق که حاکی از عمود بودن نرخ بردار یکه با خودش است داریم:

$$\dot{\lambda} = \lambda v^i{}_{|j} m^j m_i$$

$$\dot{\lambda}/\lambda = v_{i|j}\, m^i m^j = (D_{ij} + W_{ij})\, m^i m^j = D_{ij} m^i m^j$$

$$\therefore\ \dot{\lambda}/\lambda = \frac{d}{dt}\ln\lambda = D_{ij} m^i m^j = \underset{\sim}{m}\cdot \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{m}$$

اگر m در راستای بردار ویژه D باشد، چنانچه مقدار ویژه D را متناظر این بردار ویژه β بنامیم

$$\underset{\sim}{D}\cdot\underset{\sim}{m} = \beta\,\underset{\sim}{m}$$

$$D_{ij} m^j = \beta m_i \quad \text{or} \quad D^i_j m^j = \beta m^i$$

از طرفی

$$\dot{\lambda} m^i + \lambda \dot{m}^i = \lambda v^i{}_{|j} m^j$$

$$\dot{\lambda} m_i + \lambda \dot{m}_i = \lambda (D_{ij} + W_{ij})\, m^j$$

$$\dot{\lambda} = \lambda D_{ij} m^i m^j = \lambda\beta \qquad \therefore\ \beta = \dot{\lambda}/\lambda$$

$$\therefore\ \dot{m}_i = W_{ij} m^j \qquad \dot{\underset{\sim}{m}} = \underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{\omega}\times\underset{\sim}{m}$$

ω بردار محوری تانسور پاد متقارن W است. $\beta = \dot{\lambda}/\lambda$ مقادیر اصلی تانسور D هستند.

$$\omega_i = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W^{jk} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ijk} W_{jk}$$

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega^k$$

لذا بردار ω با تانسور W در تناظر یک به یک هستند.

تمرین: روابط برای $\dot{da}$, $\dot{dv}$ را استخراج کنید $(\dot{F} = L F)$

همچنین برای $\dot{C}$, $\dot{E}$, $\dot{B}$, $\dot{e}$.

$x = \chi_R(X,t)$ بیان مرجعی حرکت نامیده می‌شود. لیکن این بیان را می‌توان در چارچوب‌های مرجع دیگری نیز بیان کرد. اگر این چارچوب مرجع همان هیئت فعلی در نظر گرفته شود در اینصورت آنرا بیان نسبی حرکت گویند.

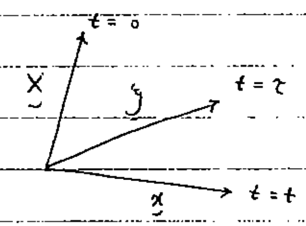
Relative Description of Motion "بیان نسبی حرکت"

$$t = \tau \longrightarrow \xi = \chi(X, \tau)$$

$$X = \chi^{-1}(x, t) \Rightarrow \xi = \chi(\chi^{-1}(x,t), \tau)$$

$$\therefore \xi = \chi_t(x, \tau)$$

$$v = \left.\frac{\partial \chi_t(x,\tau)}{\partial \tau}\right)_x \quad \text{و} \quad a = \left.\frac{\partial^2 \chi_t(x,\tau)}{\partial \tau^2}\right)_x$$



$$F(t) = \frac{\partial \chi(X,t)}{\partial X}$$

$$F^i_{\ A} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A} = F^i_{\ A}(t) \qquad F(t)$$

$$F^\alpha_{\ A} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^A} = F^\alpha_{\ A}(\tau) \qquad F(\tau)$$

در حالت $t = \tau$ داریم $F^i_{\ A} = F^\alpha_{\ A}$

$$F_t(\tau) \triangleq \frac{\partial \chi_t(x,\tau)}{\partial x}$$

$F_t(\tau)$: تانسور گرادیان تغییر فرم نسبی Relative Deformation Gradient

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial X^A} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial X^A}$$

$$F(\tau) = F_t(\tau)\, F(t) \qquad (*)$$

$$F_t(\tau) = R_t(\tau)\, U_t(\tau) = V_t(\tau)\, R_t(\tau)$$

$$C_t(\tau) = F_t^T(\tau) F_t(\tau) = U_t^2(\tau)$$

$$B_t(\tau) = F_t(\tau) F_t^T(\tau) = V_t^2(\tau)$$

$$F_t(t) = I \qquad \left.\frac{d F_t(\tau)}{d\tau}\right)_{\tau = t} = \dot{F}_t(t)$$

حال از طرفین رابطه (*) نسبت به τ مشتق گرفته و به جای $\tau = t$ قرار می‌دهیم.

$$\dot{\underset{\sim}{F}}(t) = \dot{F}_t(t)\,\underset{\sim}{F}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{F} = \dot{F}_t(t)\,\underset{\sim}{F}$$

$$\therefore \quad \dot{\underset{\sim}{F}}_t(t) = \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W}$$

$$\dot{\underset{\sim}{F}}_t(t) = \dot{\underset{\sim}{R}}_t(t) + \dot{\underset{\sim}{U}}_t(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underset{\sim}{U}}_t(t) = \underset{\sim}{D} \\ \dot{\underset{\sim}{R}}_t(t) = \underset{\sim}{W} \\ \dot{\underset{\sim}{V}}_t(t) = \underset{\sim}{D} \end{cases}$$ ارطی

مثال: حرکت سادهٔ مقابل را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 e^{-t} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 e^{-t} = \xi_1 \\ x_2 = X_2 = \xi_2 \\ x_3 = X_3 = \xi_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = x_1 - x_2 e^{-t} \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\xi_1 = (x_1 - x_2 e^{-t}) + x_2 e^{-\tau}$$

$$\xi_2 = x_2$$

$$\xi_3 = x_3$$

تانسور نرخ زاویه چرخش

حرکت صلب

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{Q}(t)\cdot(\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{X}_0) + \underset{\sim}{x}_0(t) \qquad \underset{\sim}{F}(t) = \underset{\sim}{Q}(t) \qquad \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{I}$$

$$\dot{\underset{\sim}{F}}(t) = \dot{\underset{\sim}{Q}}(t) = \underset{\sim}{L}\cdot\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}(t)$$

$$\underset{\sim}{L} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

تانسور $\dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}^T$ پادمتقارن است، زیرا

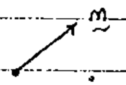
$$\overline{\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{Q}^T} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{Q}\cdot\dot{\underset{\sim}{Q}}^T = 0 \qquad \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T = -(\dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T)^T$$

$$\therefore \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{W} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

شرط لازم و کافی برای آنکه حرکت صلب باشد این است که $\underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{D}$ باشد.

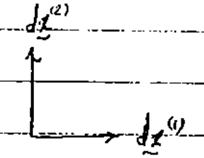
تمرین: ثابت کنید اگر $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{0}$ حرکت صلب است.

بردار محوری $\dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}^T$ مبین سرعت زاویه‌ای حرکت صلب است.



$$\dot{\lambda}/\lambda = d/dt \ln\lambda = \frac{\dot{ds}}{ds} = \underset{\sim}{m}\cdot\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{m}$$

رابطهٔ فوق را در خصوص نرخ کشیدگی انساع بدست آوریم. حال اگر دو بردار عمود بر هم را درنظر بگیریم:



$d\underset{\sim}{x}^{(1)} = ds_{(1)}\, \underset{\sim}{m}^{(1)}$ $\qquad$ $\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)}}^{\,\cdot} = \dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)}}}\, d\underset{\sim}{x}^{(2)} + d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(2)}}}$

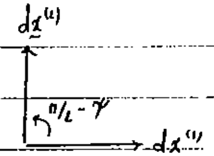
$d\underset{\sim}{x}^{(2)} = ds_{(2)}\, \underset{\sim}{m}^{(2)}$

$d\underset{\sim}{x}^{(1)} = \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}^{(1)}$

$\dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)}}} = \dot{\underset{\sim}{F}}\, d\underset{\sim}{X}^{(1)} = \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{F}\, d\underset{\sim}{X}^{(1)} = \underset{\sim}{L}\, d\underset{\sim}{x}^{(1)}$

$\dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)}}} = \underset{\sim}{L}\, d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} + d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{L}\, d\underset{\sim}{x}^{(2)}$

$= d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot (\underset{\sim}{L} + \underset{\sim}{L}^{T}) \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} = 2\, d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{D}\, d\underset{\sim}{x}^{(2)}$



$d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)} = ds_{(1)} \cdot ds_{(2)} \sin\gamma$

$\dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)}}} = ds_{(1)} \cdot ds_{(2)}\, \dot{\gamma} \cos\gamma + \dot{\overline{ds_{(1)} \cdot ds_{(2)}}} \sin\gamma$

$\text{if}\ \gamma = 0 \Rightarrow \dot{\overline{d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot d\underset{\sim}{x}^{(2)}}} = ds_{(1)} \cdot ds_{(2)}\, \dot{\gamma}$

$ds_{(1)} \cdot ds_{(2)}\, \dot{\gamma} = 2\, d\underset{\sim}{x}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{D}\, d\underset{\sim}{x}^{(2)}$

$\therefore \dot{\gamma} = 2\, \underset{\sim}{m}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{m}^{(2)}$

$\dot{\gamma}$ نرخ تغییرات زاویه برش بین دو المان مادی عمود بر هم است که برحسب $\underset{\sim}{D}$ قابل تعبیر است. به همین ترتیب نرخ کرنشها نیز قابل تعبیر است. به عنوان مثال تانسور $\underset{\sim}{C}$ را در نظر بگیرید.

$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{F} \rightarrow \dot{\underset{\sim}{C}} = \dot{\underset{\sim}{F}}^{T} \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}^{T} \cdot \dot{\underset{\sim}{F}}$

$\dot{\underset{\sim}{C}} = (\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{F})^{T} \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{F} = 2\underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{F}$

به همین ترتیب در مورد $\underset{\sim}{E}$ داریم:

$\dot{\underset{\sim}{E}} = \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{F}^{T} \cdot \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{F}$

$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}) \quad , \quad \underset{\sim}{e} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1})$

$\therefore \dot{\underset{\sim}{E}} = \underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{F} \quad , \quad \dot{\underset{\sim}{E}} = \underset{\sim}{F}^{T} \underset{\sim}{e}\, \underset{\sim}{F}$

شرایط باز برای ناورداهای تانسور $\underset{\sim}{B}$ یا $\underset{\sim}{C}$

$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr\, \underset{\sim}{B} = tr\, \underset{\sim}{C}$

$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \frac{1}{2}\left[(tr\underset{\sim}{B})^2 - tr\, \underset{\sim}{B}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(tr\underset{\sim}{C})^2 - tr\, \underset{\sim}{C}^2\right]$

$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = \det \underset{\sim}{B} = \det \underset{\sim}{C}$

λ_1^2 ، λ_2^2 ، λ_3^2 ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند

$C^3 - I_1 C^2 + I_2 C - I_3 = 0 \qquad 0 < I_i < \infty \quad i = 1,2,3$

$C = x + \frac{1}{3} I_1$

$(x + \frac{1}{3} I_1)^3 - I_1 (x + \frac{1}{3} I_1)^2 + I_2 (x + \frac{1}{3} I_1) - I_3 = 0$

$x^3 + \frac{1}{3} x I_1^2 + \frac{1}{27} I_1^3 - \frac{2}{3} x I_1^2 - \frac{1}{9} I_1^3 + I_2 x + \frac{1}{3} I_1 I_2 - I_3 = 0$

$x^3 - (\frac{1}{3} I_1^2 - I_2) x - (\frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3) = 0$

$x^3 - p x - q = 0$

$p = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2$

$q = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3$

شرط اینکه معادله فوق دارای سه ریشه حقیقی باشد $4p^3 - 27\xi^2 \geq 0$

$$4\left(\tfrac{1}{3}I_1^2 - I_2\right)^3 - 27\left(\tfrac{2}{27} I_1^3 - \tfrac{1}{3} I_1 I_2 + I_3\right)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4\left(I_1^2 - 3I_2\right)^3 \geq \left(2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27 I_3\right)^2 \\ 0 < I_1, I_2, I_3 < \infty \end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{\xi}{2}\left(\frac{3}{p}\right)^{3/2}$$

$$x = 2\sqrt{p/3}\,\cos\frac{1}{3}\left(\varphi + 2k_i\pi\right) \qquad k_i = 0, 1, 2$$

در نتیجه ریشه‌های معادله بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$c = \tfrac{1}{3} I_1 + 2\sqrt{p/3}\,\cos\tfrac{1}{3}\left(\varphi + 2k_i\pi\right) \qquad k_i = 0, 1, 2$$

معادلات همسازی

$$C_{AB} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial X^A}\frac{\partial x^j}{\partial X^B}$$

رابطه فوق شش دستگاه معادلات غیرخطی پاره‌ای است، لذا شرط همسازی این است که معادلات فوق انتگرال‌پذیر باشند

$$x^i = \chi^i(X^A, t)$$

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i dx^j = C_{AB}\,dX^A dX^B$$

R_{klmn}. با توجه به اینکه شرط لازم و کافی برای تخت بودن فضا این است که تانسور خمش ریمان - کریستوفل برابر صفر باشد، لذا شرط همسازی

$$R^{(c)}_{KLMN} = 0$$

$$R^S_{\cdot LMN} = \frac{\partial}{\partial X^M}\begin{Bmatrix} S \\ LN \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial X^N}\begin{Bmatrix} S \\ LM \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P \\ LN \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} S \\ PM \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ LM \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} S \\ PN \end{Bmatrix}$$

$$R_{KLMN} = C_{KS}\,R^S_{\cdot LMN}$$

$$[MN, K] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial C_{MK}}{\partial X^N} + \frac{\partial C_{NK}}{\partial X^M} - \frac{\partial C_{MN}}{\partial X^K}\right)$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ MN \end{Bmatrix} = C^{-1\,PK}\,[MN, K]$$

$g^{il} g_{lj} = \delta^i_j$ شرط صفر بودن

$$dS^2 = G_{AB}\, dX^A dX^B = B^{-1}_{ij}\, dx^i dx^j$$

معادلات همسازی: $R^{(B^{-1})}_{ijkl} = 0$

$$[ij,k] = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial B^{-1}_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial B^{-1}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial B^{-1}_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = B^{kp}\,[ij,p]$$

حال تانسور ریچی را در نظر بگیرید:

$$\tilde{R}_{ij} = B^{pq} R_{pijq}$$

با توجه به اینکه در V_3 تطابق یک به یک بین مؤلفه‌های تانسور کرنش و تانسور ریچی وجود دارد شرایط همسازی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tilde{R}_{ij} = 0$$

همچنین در مورد تانسور اینشتین

$$\tilde{E}_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \tfrac{1}{2} B^{pq} \tilde{R}_{pq} B^{-1}_{ij}$$

$$B^{ij}\tilde{E}_{ij} = B^{ij}\tilde{R}_{ij} - \tfrac{1}{2} B^{pq}\tilde{R}_{pq} B^{ij} B^{-1}_{ij}$$

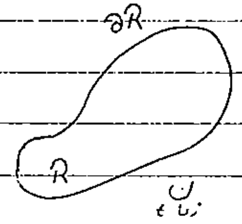
$$= -\tfrac{1}{2} B^{ij}\tilde{R}_{ij} = -\tfrac{1}{2} B^{pq}\tilde{R}_{pq}$$

$$\tilde{R}_{ij} = \tilde{E}_{ij} - B^{pq}\tilde{E}_{pq} B^{-1}_{ij}$$

لذا معادلات همسازی را به شکل $\tilde{E}_{ij} = 0$ نیز می‌توان نوشت

"معادله بقای جرم"

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\, dv = 0$$



$$\rho = \rho(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\, dv = \frac{d}{dt}\int_{R_0} \rho J\, dV = \int_{R_0} \dot{(\rho J)}\, dV \quad , \quad \dot{J} = J\, \mathrm{div}\, \underset{\sim}{v}$$

$$\dot{J} = J\, v^i|_i$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\, dv = \int_{R_0} (\dot{\rho} + \rho\, \mathrm{div}\, \underset{\sim}{v}) J\, dV = 0$$

$\dot{\rho} + \rho\, v^i|_i = 0$ معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^i)|_i = 0$$

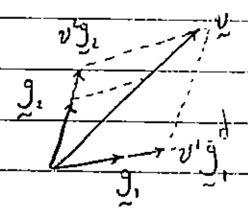
$$\int_R \rho\, dv = \int_{R_0} \rho_0\, dV = \int_{R_0} \rho J\, dV$$

فرم لاگرانژی معادله پیوستگی: $\rho = \rho_0 (I_3)^{-1/2}$ $\quad \rho J = \rho_0$

در مورد بردار داریم:

$$v = v^k g_k = \sum_{k=1}^{3} v^k \sqrt{g_{kk}} \frac{g_k}{\sqrt{g_{kk}}}$$

$$v^{\langle k \rangle} = v^k \sqrt{g_{kk}} \qquad k = 1, 2, 3$$



حال برداری را در نظر می‌گیریم که از اثر یک تانسور مرتبه دوم حاصل می‌شود

① ضرب راست $u = T \cdot v$ مؤلفه‌های فیزیکی راست تانسور T

② ضرب چپ $u = v \cdot T$ مؤلفه‌های فیزیکی چپ تانسور T

① $u^r = T^r_{\cdot s}\, v^s \qquad u^{\langle r \rangle} = T^{\langle rs \rangle}\, v^{\langle s \rangle}$

$$\frac{u^{\langle r \rangle}}{\sqrt{g_{rr}}} = T^r_{\cdot s} \frac{v^{\langle s \rangle}}{\sqrt{g_{ss}}} \qquad s: \text{summed}$$

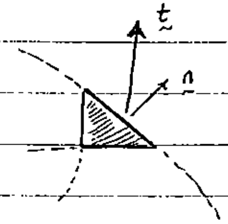
مؤلفه فیزیکی راست: $\therefore\ T^{\langle rs \rangle} = \sqrt{\dfrac{g_{rr}}{g_{ss}}}\, T^r_{\cdot s}$

② $u^r = v^s T_s^{\cdot r} \qquad u^{\langle r \rangle} = v^{\langle s \rangle}\, {}^{\langle sr \rangle}T$

$$\frac{u^{\langle r \rangle}}{\sqrt{g_{rr}}} = \frac{v^{\langle s \rangle}}{\sqrt{g_{ss}}} T_s^{\cdot r} \qquad s: \text{summed}$$

مؤلفه فیزیکی چپ: $\therefore\ {}^{\langle sr \rangle}T = \sqrt{\dfrac{g_{rr}}{g_{ss}}}\, T_s^{\cdot r}$

تانسور تنش کوشی



$$t = t^i n_i$$

$$t = t(x, t, n) = t^i(x, t)\, n_i$$

$$\begin{cases} T^{ik} \triangleq t^i \cdot g^k & t^i = T^{ik} g_k \quad \text{Malvern. See} \\ t^{ki} \triangleq t^i g^k & t^i = t^{ki} g_k \quad \text{Truesdell \& Naghdi. See} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = T^{ik} n_i g_k \Rightarrow t^k = T^{ik} n_i \\ t = t^{ki} n_i g_k \Rightarrow t^k = t^{ki} n_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} [t^1\ t^2\ t^3] = (n_1\ n_2\ n_3) \cdot \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \\ [t^1\ t^2\ t^3]^T = \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

در مواد غیر قطبی هر دو تانسور تنش فوق یکسان می‌شوند

مؤلفه فیزیکی تانسور تنش

در مورد تعریف مؤلفه‌های فیزیکی یک تانسور مرتبه دوم تعاریف متفاوتی وجود دارد

چنانچه تانسور T متقارن باشد $T^{r}{}_{.s} = T_{s}{}^{.r}$ در اینصورت داریم:

$$T^{\langle rs\rangle} = {}^{\langle sr\rangle}T$$

یعنی ماتریس مؤلفه‌های فیزیکی راست مقلوب ماتریس مؤلفه‌های فیزیکی چپ است.

یادآوری می‌شود که:

$$\underline{T} = T^{ij}\,\underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$$

$$\underline{v} = v^k \underline{g}_k$$

چپ: $\underline{u} = \underline{T}\cdot\underline{v} = (T^{ij}\,\underline{g}_i \otimes \underline{g}_j)\cdot v_k\,\underline{g}^k$ $\quad \delta_j^k$

$$\underline{u} = T^{ij} v_j\, \underline{g}_i$$

$$\therefore\ u^i = T^{ij} v_j = T^{i}{}_{.j}\, v^j$$

راست: $\underline{u} = \underline{v}\cdot\underline{T} = v_k\,\underline{g}^k\cdot(T^{ij}\,\underline{g}_i \otimes \underline{g}_j)$ $\quad \delta_i^k$

$$\underline{u} = v_k\, T^{kj}\, \underline{g}_j$$

$$\therefore\ u^j = v_k T^{kj} = v^k T_k{}^{.j}$$

حال رابطه بین مؤلفه‌های فیزیکی چپ و راست را بدست می‌آوریم

$$T^{r}{}_{.s} = g^{rp} T_{ps} = g^{rp} g_{sq} T_p{}^{.q}$$

$$T^{\langle rs\rangle} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{ss}}}\,(g^{rp} g_{sq} T_p{}^{.q}) \qquad p,q:\ \text{summed}$$

$$T_p{}^{.q} = \sqrt{\frac{g_{pp}}{g_{qq}}}\ {}^{\langle pq\rangle}T$$

با جایگذاری داریم:

$$T^{\langle rs\rangle} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{ss}}}\cdot\sqrt{\frac{g_{pp}}{g_{qq}}}\ g^{rp} g_{sq}\ {}^{\langle pq\rangle}T \qquad p,q:\ \text{summed}$$

چنانچه دستگاه مختصات متعامد باشد داریم:

$$g_{km} = 0 \qquad k \neq m$$

$$g^{rr} = 1/g_{rr} \quad \text{etc} \quad \Rightarrow \quad T^{\langle rs\rangle} = {}^{\langle rs\rangle}T$$

یعنی برای دستگاه مختصات متعامد مؤلفه‌های فیزیکی چپ و راست با یکدیگر برابر شده و آنرا با $T_{\langle rs\rangle}$ نمایش می‌دهیم

$$T_{\langle rs\rangle} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{ss}}}\ T^{r}{}_{.s}$$

$$= \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{ss}}}\ g^{rp} T_{ps} \qquad p:\ \text{summed}$$

$$= \frac{T_{rs}}{\sqrt{g_{rr}}\sqrt{g_{ss}}}$$

$$T_{\langle rs\rangle} = \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{ss}}}\ T^{rp} g_{sp} = \sqrt{g_{rr}}\sqrt{g_{ss}}\ T^{rs}$$

$$= \sqrt{\frac{g_{ss}}{g_{rr}}}\ T_r{}^{.s}$$

در مورد تعریف مؤلفه‌های فیزیکی تانسورهای مرتبه بالاتر نیز به روش اخیر عمل می‌کنیم یعنی مبنا را بر حفظ رابطه مربوطه می‌گذاریم. به عنوان مثال اگر تانسور هوک را در نظر بگیریم:

$$T^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}$$

$T^{\langle ij\rangle} = C^{\langle ijkl\rangle} E^{\langle kl\rangle}$

در دستگاه مختصات متعامد داریم:

$T_{\langle ij\rangle} = C_{\langle ijkl\rangle} E_{\langle kl\rangle}$

$$\frac{T_{\langle ij\rangle}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} = C^{ijkl} E_{\langle kl\rangle}\sqrt{g_{kk}\, g_{ll}}$$

$\therefore C_{\langle ijkl\rangle} = \sqrt{g_{ii}\, g_{jj}\, g_{kk}\, g_{ll}} \cdot C^{ijkl}$ Not summed

نکاتی در خصوص ویژگیهای مؤلفه‌های فیزیکی تانسورهای مرتبه دوم: "Truesdell . See"

• ماتریسهائی که درایه‌ای آنها مؤلفه‌های $T^{\langle rs\rangle}$ ، $^{\langle rs\rangle}T$ ، $T^{r}_{.s}$ ، $T_{r}^{.s}$ هستند، مقادیر ویژه یکسان دارند.

• بردار ویژه چپ $[T_r^{.s}]$ مطابق با بردار ویژه چپ $T^{\langle rs\rangle}$ است.

• بردار ویژه راست $[T^r_{.s}]$ مطابق با بردار ویژه راست $T^{\langle rs\rangle}$ است.

$T^r_{.s}\, v^s = \lambda v^r$

$T^{\langle rs\rangle} v^{\langle s\rangle} = \lambda v^{\langle r\rangle}$

(۱) در ضرب داخلی $\underline{P} = \underline{T}\cdot\underline{S}$ ؛ $P^r_{.s} = T^r_{.p}\, S^p_{.s}$ داریم:

$P^{\langle rs\rangle} = T^{\langle rp\rangle} . S^{\langle ps\rangle}$

$^{\langle rs\rangle}P = {}^{\langle rp\rangle}T . {}^{\langle ps\rangle}S$

(۲) معکوس ماتریس $[T^{\langle rs\rangle}]$ اگر وجود داشته باشد، ماتریس مؤلفه‌های فیزیکی راست معکوس $T^r_{.s}$ است.

(۳) ماتریس مؤلفه‌های فیزیکی هر توان، مثبت یا منفی، ماتریس مؤلفه‌های مخلوط $T^r_{.s}$ همان توان ماتریس مؤلفه‌های فیزیکی راست آن است.

(۴) گزاره‌های (۲)، (۳) با اگر به جای راست، چپ قرار داده شود و به جای $T^r_{.s}$ ، $T_r^{.s}$ گزاره‌های صحیح بدست آید.

$F^i_{.A} = \frac{\partial x^i}{\partial X^A}$ $\quad dx^i = F^i_{.A}\, dX^A$

$F^{\langle iA\rangle} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{G_{AA}}} \cdot F^i_{.A}$

$B^{ij} = G^{AB} F^i_{.A} F^j_{.B}$

برای دستگاه مختصات متعامد

$B^{ij} = \frac{1}{G_{AA}} F^i_{.A} F^j_{.A}$ $\quad A$: Summed

$B_{\langle ij\rangle} = F_{\langle iA\rangle} \cdot F_{\langle jA\rangle}$

$C_{\langle AB\rangle} = F_{\langle iA\rangle} \cdot F_{\langle iB\rangle}$

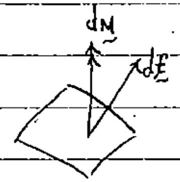
تعادل ممنتم خطی

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho \underline{v}\, dv = \int_R \rho \underline{b}\, dv + \int_{\partial R} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})\, da$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho \underline{v}\, dv = \int_R \rho \dot{\underline{v}}\, dv = \int_R \rho \underline{a}\, dv$$

$$\int_R \rho(\underline{a}-\underline{b})\, dv = \int_{\partial R} \underline{t}(\underline{n})\, da$$

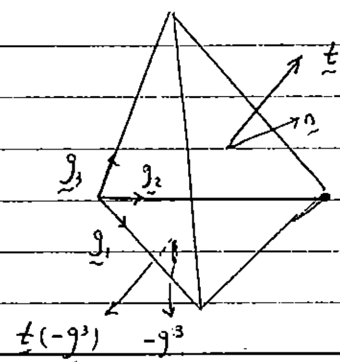
اصل تنش کوشی:



$$\lim_{da\to 0} \frac{d\underline{F}}{da} = \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})$$

$$\lim_{da\to 0} \frac{d\underline{M}}{da} \neq 0 \quad \text{for Polar Material.}$$

اعمال تعادل هرم در دنباله هرم:



$a_i/\sqrt{g^{ii}}$ مساحت سطح با نرمال $\underline{g}^i$ است

$$a\underline{n} - a_i \underline{g}^i = \underline{0}$$

$$\underline{n} = n_i \underline{g}^i$$

$$n_i = \frac{a_i}{a} \quad \star$$

با قضیه میانگین داریم:

$$\int_{a_1} \underline{t}(\underline{g}^1)\, da = \underline{t}^*(-\underline{g}^1)\, a_1$$

$$\underline{t}(-\underline{g}^1) = \underline{t}(\underline{x},t,-\underline{g}^1)$$

$$\underline{t}^*(-\underline{g}^1) = \underline{t}(\underline{x}^*,t,-\underline{g}^1)$$

از طرفی چون $\underline{a}$ کراندار است داریم

$$\int_R \rho(\underline{a}-\underline{b})\, dv = \rho \underline{K} V$$

که V حجم R است.

$$\rho \underline{K} V = \underline{t}^*(\underline{n})\, a + \underline{t}^*(-\underline{g}^1)\, a_1 + \underline{t}^*(-\underline{g}^2)\, a_2 + \underline{t}^*(-\underline{g}^3)\, a_3$$

دنباله صفر شونده‌ای را برای هرم در نظر می‌گیریم

$$V \to 0 \qquad \frac{V}{a} \to 0$$

$$\underline{t}(\underline{x},t,\underline{n}) = -\underline{t}(\underline{x},t,-\underline{g}^i)\, n_i$$

$$\underline{t}(\underline{x},t,\underline{g}^i) = -\underline{t}(\underline{x},t,-\underline{g}^i)$$

$$\therefore\ \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n}) = \underline{t}(\underline{x},t,\underline{g}^i)\, n_i$$

$$\underline{t}^i(\underline{x},t) \triangleq \underline{t}(\underline{x},t,\underline{g}^i)$$

حال تانسور تنش را به این صورت می‌توان تعریف کرد

$$T^{ik} \triangleq \underline{t}^i \cdot \underline{g}^k \qquad \underline{t}^i = T^{ik}\underline{g}_k$$

$$t^{ki} \triangleq \underline{t}^i \cdot \underline{g}^k \qquad \underline{T} = T^{ik}\underline{g}_i \otimes \underline{g}_k$$

فرم ضعیف معادلات تغییر ممنتوم خطی

$$\int_R \rho \underline{a}\, dv = \int_R \rho \underline{b}\, dv + \int_{\partial R} \underline{t}(\underline{n})\, da$$

حال با استفاده از قضیه دیورژانس داریم:

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{b} + \underline{t}^i{}_{,i}$$

$$\underline{t}^i = T^{ik} \underline{g}_k \longrightarrow \underline{t}^i{}_{,i} = T^{ik}|_i\, \underline{g}_k$$

$$\rho a^k \underline{g}_k = \rho b^k \underline{g}_k + T^{ik}|_i\, \underline{g}_k$$

$$\therefore\ T^{ik}|_i + \rho b^k = \rho a^k = \rho \frac{\delta v^k}{\delta t} = \rho\left(\frac{dv^k}{dt} + \left\{ {k \atop mn} \right\} v^m v^n\right)$$

تغییر ممنتوم زاویه‌ای

$$\frac{d}{dt}\int_R \underline{x} \times \rho \underline{v}\, dv = \int_R \underline{x} \times \rho \underline{b}\, dv + \int_{\partial R} \underline{x} \times \underline{t}(\underline{n})\, da$$

از طرفی :

$$\frac{d}{dt}\int_R \underline{x} \times \rho \underline{v}\, dv = \int_R \underline{x} \times \rho \underline{a}\, dv$$

و :

$$\int_{\partial R} \underline{x} \times \underline{t}(\underline{n})\, da = \int_{\partial R} \underline{x} \times \underline{t}^i n_i\, da$$

$$= \int_R (\underline{x} \times \underline{t}^i)_{,i}\, dv = \int_R (\underline{x} \times \underline{t}^i{}_{,i} + \underline{x}_{,i} \times \underline{t}^i)\, dv$$

$$\therefore \int_R \underline{x} \times (\rho \underline{a} - \cancel{\rho \underline{b}} - \underline{t}^i{}_{,i})\, dv = \int_R \underline{g}_i \times \underline{t}^i\, dv$$

لذا از فرم ضعیف معادله تعادل با تغییر ممنتوم زاویه‌ای تقارن تنسور به دست می‌آید

$$\underline{g}_i \times \underline{t}^i = \underline{0}$$

$$\underline{g}_i \times T^{ik} \underline{g}_k = \underline{0}$$

$$\underline{g}_i \times \underline{g}_k = \varepsilon_{ikm} \underline{g}^m \longrightarrow \varepsilon_{ikm} T^{ik} \underline{g}^m = 0$$

$$\varepsilon_{ikm} T^{ik} = 0 \quad \therefore\ T^{ik} = T^{ki}$$

تغییر انرژی و توان مکانیکی

$$R_b = \int_R \rho \underline{b} \cdot \underline{v}\, dv$$

$$R_c = \int_{\partial R} \underline{t} \cdot \underline{v}\, da$$

$$K = \frac{1}{2}\int_R \rho \underline{v} \cdot \underline{v}\, dv$$

$$R = R_b + R_c = \int_R \rho \underline{b} \cdot \underline{v}\, dv + \int_{\partial R} \underline{t}^i n_i \cdot \underline{v}\, da$$

$$\int_{\partial R} \underline{t}^i \cdot \underline{v}\, n_i\, da = \int_R (\underline{t}^i \cdot \underline{v})_{,i}\, dv = \int_R (\underline{t}^i{}_{,i} \cdot \underline{v} + \underline{t}^i \cdot \underline{v}_{,i})\, dv$$

$$R = R_b + R_c = \int_R \rho \underline{a} \cdot \underline{v}\, dv + \int_R \underline{t}^i \cdot \underline{v}_{,i}\, dv$$

$$\int_R \rho\, \underline{a}\cdot\underline{v}\, dv = \frac{dK}{dt}$$

$$\therefore \int_R \underline{t}^i\, \underline{v}_{,i}\, dv = \int_R T^{ik} D_{ik}\, dv$$

$$\text{Stress Power} \triangleq \int_R T^{ik} D_{ik}\, dv = \int_R \left(\frac{1}{\rho} T^{ik} D_{ik}\right) dm$$

نتیجه کل توان تامین شده عبارتست از:

$$R = R_b + R_c = \frac{dK}{dt} + \int_R T^{ki} D_{ki}\, dv$$

رابطه فوق در اثر یک اتفاق است (یک اصل جدید نیست)

قانون اول ترمودینامیک (تعادل انرژی)

$\varepsilon = \varepsilon(\underline{x}, t)$ Specific internal energy — انرژی داخلی ویژه

$r = r(\underline{x}, t)$ Rate of heat supply — نرخ تامین حرارت

$h = h(\underline{x}, t; \underline{n})$ Heat flux supply — شار حرارتی بر واحد سطح

$\mathcal{U} = \int_R \rho \varepsilon\, dv$ — انرژی داخلی جرم R

$$\frac{dK}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = R_b + R_c + \int_R \rho r\, dv - \int_{\partial R} h(\underline{n})\, da$$

$$= \int_R \rho(\underline{b}\cdot\underline{v} + r)\, dv + \int_{\partial R} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da$$

با اعمال تعادل انرژی به ناحیه صفر هم نتیجه می‌گیریم

$$h = \underline{q}\cdot\underline{n} = q^i n_i$$

$\underline{q}$: Heat flux vector

$$h(\underline{x}, t; \underline{n}) = q^i(\underline{x}, t)\, n_i = \underline{q}(\underline{x}, t)\cdot\underline{n}$$

فرم موضعی تعادل انرژی:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r - q^i{}_{|i} + T^{ki} D_{ki}$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r - \operatorname{div} \underline{q} + \underline{T}\cdot\underline{D}$$ دیادیک؟

قانون دوم ترمودینامیک.

$\eta = \eta(\underset{\sim}{x},t)$ Specific Entropy آنتروپی ویژه

$\theta = \theta(\underset{\sim}{x},t) > 0$ Absolute Temperatur دمای مطلق

کل آنتروپی در R $= \int_R \rho\eta\, dv$ $\quad [\eta] = \frac{\text{حرارت}}{\text{دما}}$

قانون دوم ترمودینامیک را با بیان Clasius-Duhem Inequality بیان می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\eta\, dv \geq \int_R \rho\frac{r}{\theta}\, dv - \int_{\partial R}\frac{h}{\theta}\, da$$

$$\int_{\partial R} h/_\theta\, da = \int_{\partial R}\frac{q^i n_i}{\theta}\, da = \int_R \operatorname{div}(q/_\theta)\, dv$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{q}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\operatorname{div}\underset{\sim}{q} - \frac{1}{\theta^2}\underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{g} \quad , \quad \underset{\sim}{g} \triangleq \operatorname{grad}\theta$$

$$\therefore \quad \rho\theta\dot\eta - \rho r + \operatorname{div}\underset{\sim}{q} - \frac{1}{\theta}\underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{g} \geq 0$$

لذا از ترکیب قانون اول و دوم ترمودینامیک عبارت زیر بدست می‌آید

$$\rho\theta\dot\eta - \rho r + \operatorname{div}\underset{\sim}{q} - 1/_\theta\, \underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{g} \geq 0$$

$$\rho r - \rho\dot\varepsilon - \operatorname{div}\underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{T}:\underset{\sim}{D} = 0$$

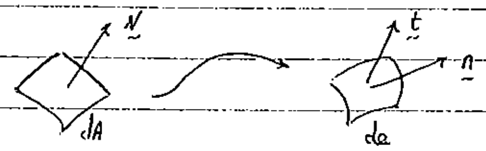
نامساوی اتلاف : $\quad \rho\theta\dot\eta - \rho\dot\varepsilon + \underset{\sim}{T}:\underset{\sim}{D} - \frac{1}{\theta}\underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{g} \geq 0$

"Helmholtz free Energy"

$$\psi \triangleq \varepsilon - \eta\theta$$

$$\therefore \quad -\rho(\dot\psi + \eta\dot\theta) + \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{D} - \frac{1}{\theta}\underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{g} \geq 0$$

تانسور تنش پیولا کیرشهف اول First-Piola-Kirchhoff



$d\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{t}\, da = \underset{\sim}{t}^\circ dA$

$\underset{\sim}{t}^\circ = \underset{\sim}{t}^\circ(\underset{\sim}{X}, t; \underset{\sim}{N})$

اصل تعادل مومنتم خطی : $\quad \frac{d}{dt}\int_R \rho\underset{\sim}{v}\, dv = \int_R \rho\underset{\sim}{b}\, dv + \int_{\partial R}\underset{\sim}{t}\, da$

$dv = J\, dV \quad , \quad J = \det \underset{\sim}{F} \quad , \quad \rho J = \rho_0$

$$\frac{d}{dt}\int_{R_0}\rho_0\underset{\sim}{v}\, dV = \int_{R_0}\rho_0 b\, dV + \int_{\partial R_0}\underset{\sim}{t}^\circ dA$$

با اعمال تعادل مومنتم در هیئت مرجع به دنبال تنش هایی می‌گردیم که

$\underset{\sim}{t}^\circ = \underset{\sim}{t}_0^M N_M$

$\underset{\sim}{t}_0^M = \underset{\sim}{t}_0^M(\underset{\sim}{X}, t, \underset{\sim}{G}^M) \qquad T_0^{Ai} = \underset{\sim}{t}_0^A\cdot\underset{\sim}{g}^i$

$\underset{\sim}{T}_0 = T_0^{Ai}\,\underset{\sim}{G}_A \otimes \underset{\sim}{g}_i \qquad t_0^A = T_0^{Ai}\,\underset{\sim}{g}_i$

تانسور تنش پیولا را بعضی مراجع $\underset{\sim}{T}_0^T$ تعریف نموده‌اند

$$\underset{\sim}{t}_{\circ} = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{T}_{\circ} = N^{B} \underset{\sim}{G}_{B} \cdot T_{\circ}^{Ai} \underset{\sim}{G}_{A} \otimes \underset{\sim}{g}_{i} = \underset{\sim}{t}_{\circ}^{M} N_{M}$$

$$t^{\circ} = t_{\circ}^{i} \, g_{i}$$

$$t_{\circ}^{i} = N_{A} T_{\circ}^{Ai}$$

$$\underset{\sim}{t}\, da = \underset{\sim}{t}_{\circ}\, dA \longrightarrow \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{T}_{\circ}$$

$$n^{i} \underset{\sim}{g}_{i} \cdot T_{lm}\, \underset{\sim}{g}^{l} \otimes \underset{\sim}{g}^{m} = n^{l} T_{lm}\, \underset{\sim}{g}^{m} = n_{l} T^{lm} \underset{\sim}{g}_{m}$$

$$t^{m} = n_{l} T^{lm} \qquad t_{\circ}^{m} = N_{K} T_{\circ}^{Km}$$

$$T^{lm} n_{l}\, da = T_{\circ}^{Km} N_{K}\, dA$$

$$n_{l}\, da = J X^{K}_{,l} N_{K}\, dA$$

$$T^{lm} \, J X^{k}_{,l} = T_{\circ}^{km}$$

تانسور اول پیولا - کیرشهف

$$\begin{cases} \underset{\sim}{T}_{\circ} = J \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{T} \\ T_{\circ}^{Km} = J X^{K}_{,l} T^{lm} \end{cases}$$

اصل تعادل ممنتم زاویه‌ای : $\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{T}_{\circ} = \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T} \underset{\sim}{F}^{T}$

$$J T^{lm} = x^{l}_{,K} T_{\circ}^{Km} = F^{l}_{\cdot K} T_{\circ}^{Km}$$

$$F^{l}_{\cdot K} T_{\circ}^{Km} = F^{m}_{\cdot K} T_{\circ}^{Kl}$$

-تانسور پیولا متقارن Second Piola-Kirchhoff

$$S^{AB} \triangleq X^{A}_{,i} T_{\circ}^{Bi}$$

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T}, \quad \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T} = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S}$$

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T} \longrightarrow \underset{\sim}{S}^{T} = \underset{\sim}{T}_{\circ} \underset{\sim}{F}^{-T}$$

$$\underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T} = \underset{\sim}{T}_{\circ} \underset{\sim}{F}^{-T}$$

$$\underset{\sim}{F} (\underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T}) \underset{\sim}{F}^{T} = \underset{\sim}{F} (\underset{\sim}{T}_{\circ} \underset{\sim}{F}^{-T}) \underset{\sim}{F}^{T} \quad \therefore \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^{T}$$

$$T_{\circ}^{Bi} = x^{i}_{,A} S^{AB}$$

$$\underset{\sim}{T} = \frac{1}{J} \underset{\sim}{F} \underset{\sim}{S} \underset{\sim}{F}^{T}$$

بازنگارش معادله تعادل خطی

$$\int_{R_{\circ}} \rho_{\circ} \underset{\sim}{a}\, dV = \int_{R_{\circ}} \rho_{\circ} \underset{\sim}{b}\, dV + \int_{\partial R_{\circ}} \underset{\sim}{t}_{\circ}\, dA$$

در موقعیت تغییر نیافته بدست آید

$$\delta_{A} T_{\circ}^{Ai} = T_{\circ}^{Ai}|_{A} + T_{\circ}^{Aj}|_{j} F^{j}_{\cdot A}$$

$$\delta_{A} T_{\circ}^{Ai} + \rho_{\circ} b^{i} = \rho_{\circ} a^{i}$$

$$\underset{\sim}{F} \underset{\sim}{T}_{\circ} = \underset{\sim}{T}_{\circ}^{T} \underset{\sim}{F}^{T}$$

$$x^{i}_{,A} T_{\circ}^{Aj} = x^{j}_{,A} T_{\circ}^{Ai}$$ در موقعیت تعادل ممنتم زاویه‌ای تقارن نمی

$$\hat{h}\, da = \hat{h}_0\, dA \quad , \quad \hat{h}_0 = \hat{h}_0(\underset{\sim}{X}, t, \underset{\sim}{N})$$

تبادل انرژی:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = R_b + R_c + \int_{R} \rho r\, dv - \int_{\partial R} \hat{h}\, da$$

$$= \int_{R_0} \rho_0\, b \cdot v\, dV + \int_{\partial R_0} t_0 \cdot v\, dA + \int_{R_0} \rho_0 r\, dV - \int_{\partial R_0} \hat{h}_0\, dA$$

$$\therefore \hat{h}_0 = Q^A N_A = \underset{\sim}{Q} \cdot \underset{\sim}{N} \quad , \quad \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{X}, t)$$

$$q^i n_i\, da = Q^M N_M\, dA$$

$$J q^i X^M_{,i} N_M\, dA = Q^M N_M\, dA$$

$$Q^M = J X^M_{,i} q^i \qquad or \qquad \underset{\sim}{Q} = J \underset{\sim}{F}^{-1} \underset{\sim}{q}$$

$$q^i = \frac{1}{J} x^i_{,M} Q^M \qquad or \qquad J \underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{F}\, \underset{\sim}{Q}$$

تعادل انرژی نسبت به هیئت مرجع

$$\frac{d}{dt}\int_{R_0} \rho_0 (\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v})\, dV = \int_{R_0} \rho_0 (\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{v} + r)\, dV + \int_{\partial R_0} (\underset{\sim}{t}_0 \cdot \underset{\sim}{v} - \hat{h}_0)\, dA$$

$$\int_{R_0} \rho_0 (\dot{\varepsilon} + \underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{v})\, dV = \int_{R_0} \rho_0 (\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{v} + r)\, dV + \int_{\partial R_0} (\underset{\sim}{t}_0^M N_M \cdot \underset{\sim}{v} - Q^M N_M)\, dA$$

$$\int_{\partial R_0} (\underset{\sim}{t}_0^M \cdot \underset{\sim}{v} - Q^M) N_M\, dA = \int_{R_0} [(\underset{\sim}{t}_0^M \cdot \underset{\sim}{v})_{,M} - Div\, \underset{\sim}{Q}]\, dV$$

در نتیجه فرم موضعی معادله تعادل انرژی به صورت زیر در می‌آید

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \rho_0 r + \underset{\sim}{t}_0^M \cdot \underset{\sim}{v}_{,M} - Div\, \underset{\sim}{Q}$$

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \rho_0 r + T_0^{Mi} v_{i,M} - Q^A|_A$$

بار دیگر می‌شود که در هیئت فعلی داشتیم

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r + T^{ij} D_{ij} - q^i|_i$$

حال رابطه فوق را با توجه به تانسور تنش پیولا نوع دوم نیز نوشت

$$T_0^{Mi} v_{i,M} = x^i_{,A} S^{AM} v_{i,M}$$

$$= x^i_{,A} S^{AM} v_{i|j}\, x^j_{,M}$$

$$= x^i_{,A}\, x^j_{,M} S^{AM} (D_{ij} + W_{ij}) = x^i_{,A}\, x^j_{,B} D_{ij} S^{AB}$$

$$= S^{AB} \dot{E}_{AB}$$

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \rho_0 r + \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{E}} - Div\, \underset{\sim}{Q}$$

قانون دوم ترمودینامیک در هیئت مرجع

نرخ تامین آنتروپی $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{R_0} \rho_0 \eta \, dV \geq$ نرخ افزایش آنتروپی

$$\geq \int_{R_0} \rho_0 \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial R_0} \frac{h_0}{\theta} dA$$

$$\frac{d}{dt}\int_{R_0} \rho_0 \eta \, dV = \int_{R_0} \rho_0 \dot{\eta} \, dV$$

$$\int_{\partial R_0} \frac{h_0}{\theta} dA = \int_{\partial R_0} \frac{Q^M}{\theta} N_M \, dA = \int_{R_0} \mathrm{Div}\left(\frac{Q}{\theta}\right) dV$$

$$\mathrm{Div}\left(\frac{Q}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}\mathrm{Div}\, \underset{\sim}{Q} - \frac{1}{\theta^2}\mathrm{Grad}\,\theta \cdot \underset{\sim}{Q}$$

با جایگذاری داریم:

$$\rho_0 \theta \dot{\eta} - \rho_0 r + \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{Q} - \frac{1}{\theta} Q^A \theta_{,A} \geq 0$$

حال اگر تحلیل بالانس انرژی را در نظر بگیریم، در هم را هم که در قالب معادلات متشکله کاربرد دارد می‌توان نوشت:

$$\rho_0 r - \rho_0 \dot{\varepsilon} + T_0^{Mi} v_{i,M} - \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{Q} = 0$$

در نتیجه:

$$\rho_0 \theta \dot{\eta} - \rho_0 \dot{\varepsilon} + T_0^{Mi} v_{i,M} - \frac{1}{\theta} Q^A \theta_{,A} \geq 0$$

$$-\rho_0 (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + T_0^{Mi} v_{i,M} - \frac{1}{\theta} Q^A \theta_{,A} \geq 0$$

$$-\rho_0 (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + S^{AB} \dot{E}_{AB} - \frac{1}{\theta} Q^A \theta_{,A} \geq 0$$

"توجیه وجود آنتروپی"

اگر معادله انرژی را برای یک سیال ایده‌ال در غیاب هر گونه شار حرارتی بنویسیم:

$$\underset{\sim}{T} = -p\,\underset{\sim}{I} \qquad \underset{\sim}{q} = 0$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r - p\, \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{D} \longrightarrow r = \dot{\varepsilon} + \frac{p}{\rho}\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{D}$$

از طرفی معادله پیوستگی هم عبارت است از:

$$\dot{\rho} + \rho\, \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{D} = 0 \longrightarrow r = \dot{\varepsilon} - \frac{p\dot{\rho}}{\rho^2} = \dot{\varepsilon} + p\dot{v}$$

$v \triangleq \dfrac{1}{\rho}$ Specific Volume

حال برای "گاز ایده‌ال" انرژی داخلی تنها تابع دما است

$$\varepsilon = \varepsilon(\theta) \quad , \quad p = \bar{R}\rho\theta$$

که $\bar{R}$ ثابت گاز است، $\bar{R} = R/M$، حال رابطه انرژی به صورت زیر در می‌آید

$$r = \frac{d\varepsilon}{d\theta}\dot{\theta} - \frac{\bar{R}}{\rho}\theta\dot{\rho}$$

$$r/\theta = \frac{1}{\theta}\frac{d\varepsilon}{d\theta}\dot{\theta} - \frac{\bar{R}}{\rho}\dot{\rho} = \dot{\eta}$$

لذا نتیجه می‌گیریم:

$$\exists\, \eta \ \ \mathrm{s.t.} \ \ \eta = \eta(\rho, \theta)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta}\dot{\theta}$$

به قسمی که:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta}\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{c_v}{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \rho} = -\frac{\bar{R}}{\rho}$$

"تعریف اولیه آنتروپی"

"معادله توازن آنتروپی"

ξ = نرخ تولید آنتروپی (آنتروپی بر واحد جرم بر واحد زمان)

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\eta\, dv = \int_R \rho(s+\xi)\, dv - \int_{\partial R} k\, da \qquad s = r/\theta \quad h = \theta k$$

رابطه فوق یک رابطه برهانی است که معادله بالانس آنتروپی است.

$k = \underset{\sim}{P}\cdot\underset{\sim}{n}$ $\quad \underset{\sim}{P}$: Entropy flux Vector

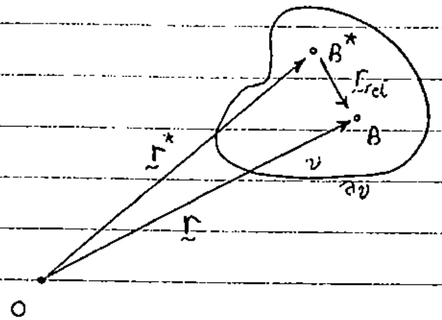
$\underset{\sim}{q} = \theta \underset{\sim}{P}$

لذا فرم موضعی معادله توازن آنتروپی بصورت زیر در می‌آید

$$\rho\dot{\eta} = \rho(s+\xi) - \operatorname{div}\underset{\sim}{P}$$

Polar Materials "تئوری مواد قطبی"

" مممنتم زاویه‌ای Angular Momentum "



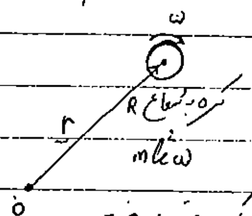
$$\underset{\sim}{H}_o = \int_v \underset{\sim}{r}\times\rho\underset{\sim}{v}\, dv$$

$$\begin{cases}\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}_{rel} + \underset{\sim}{r}^* \\ \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^* + \underset{\sim}{v}_{rel}\end{cases}$$

$$\underset{\sim}{H}_o = \int_v (\underset{\sim}{r}^* + \underset{\sim}{r}_{rel})\times\rho\underset{\sim}{v}\, dv = \underset{\sim}{r}^*\times m\underset{\sim}{v}^* + \int_v \underset{\sim}{r}_{rel}\times\rho\underset{\sim}{v}\, dv$$

$$\therefore \underset{\sim}{H}_o = \underset{\sim}{r}^*\times m\underset{\sim}{v}^* + \int_v \underset{\sim}{r}_{rel}\times\rho\underset{\sim}{v}_{rel}\, dv = \underset{\sim}{H}^*_o + \underset{\sim}{H}_{rel_o}$$

حال اگر یک کره کوچکی را که در حالت چرخش و حرکت است در نظر بگیریم:



Order $\underset{\sim}{H}^* = R^3$

Order $\underset{\sim}{H}_{rel} = R^5$

اگر ω به حدی زیاد باشد که $R^2\omega$ محدود باشد بطوری که دو جزء ممنتم زاویه‌ای از مرتبه R^3 باشد در این صورت هر دو جزء را بایستی در نظر داشت بشود.

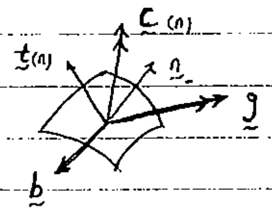
ممنتم زاویه‌ای ذاتی بر واحد جرم $\underline{l}$: Intrinsic Angular Momentum

$$\underline{H}_o = \int_R \underline{x} \times \rho \underline{v}\, dv + \int_R \rho \underline{l}\, dv$$

حال می‌توان میدان‌های کوپل‌های سطحی و کوپل‌های جسمی را تعریف کرد

$\underline{g}$: Body Couple کوپل جسمی

$\underline{c}_{(n)}$: Surface Couple کوپل سطحی



تعادل ممنتم زاویه‌ای برای مواد قطبی

$$\frac{d}{dt}\int_R (\underline{x} \times \rho \underline{v} + \rho \underline{l})\, dv = \int_R (\underline{x} \times \rho \underline{b} + \rho \underline{g})\, dv + \int_{\partial R} (\underline{x} \times \underline{t} + \underline{c})\, da$$

$$\int_R (\underline{x} \times \rho \underline{a} + \rho \dot{\underline{l}})\, dv = \int_R (\underline{x} \times \rho \underline{b} + \rho \underline{g})\, dv + \int (\underline{x} \times \underline{t}^i n_i + \underline{c})\, da$$

با استفاده از اصل تعادل ممنتم خطی:

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{b} + \underline{t}^i_{,i}$$

داریم:

$$\int_R \rho \dot{\underline{l}}\, dv = \int_R \rho \underline{g}\, dv + \int_R \underline{g}_i \times \underline{t}^i\, dv + \int_{\partial R} \underline{c}_{(n)}\, da$$

با اعمال رابطهٔ فوق به المان چهاروجهی نتیجه می‌گیریم:

$\underline{c}_{(\underline{n})} = \underline{c}^i n_i \quad , \quad \underline{c}^i = \underline{c}(\underline{x}, t ; \underline{g}^i)$

$\underline{c}^i \cdot \underline{g}^k \triangleq c^{ik} \qquad \underline{c}$: Couple Stress Tensor

$\underline{c} = \underline{n} \cdot \underline{c} \qquad c^i = n_j c^{ji}$

$\underline{c} = \underline{n} \cdot \underline{c} \qquad \underline{c} = c^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j$

در ادامه برای به دست آوردن فرم موضعی اصل تعادل ممنتم زاویه‌ای

$$\int_{\partial R} \underline{c}_{(\underline{n})}\, da = \int_{\partial R} \underline{c}^i n_i\, da = \int_R \underline{c}^i_{,i}\, dv$$

$$\therefore \quad \rho \dot{\underline{l}} = \rho \underline{g} + \underline{g}_i \times \underline{t}^i + \underline{c}^i_{,i}$$

یادآوری می‌شود که:

$\underline{t}^i = T^{ik} \underline{g}_k \qquad \underline{c}^i = C^{ik} \underline{g}_k$

در نتیجه داریم:

$$\rho \dot{\underline{l}} = \rho \underline{g} + T^{ik} \underline{g}_i \times \underline{g}_k + C^{ij}|_i\, \underline{g}_j$$

پس در واقع تانسور تنش متقارن نیست، کوپل جرمی و انتقالات آن در تولید تانسور کوپل تنش سهم دارد.

$$\underline{g}_i \times \underline{g}_k = \epsilon_{ikj}\, \underline{g}^j$$

$$T^{ik} \underline{g}_i \times \underline{g}_k = \epsilon_{ikj} T^{ik} \underline{g}^j = \epsilon^{ikj} T_{ik}\, \underline{g}_j$$

لذا

$$\rho \frac{\delta l^i}{\delta t} = \rho g^i + \epsilon^{ikj} T_{ik} + C^{ji}|_i$$

حال با تقسیم تانسور تنش به دو جزء متقارن $T_{(ij)}$ و جزء پاد متقارن $T_{[ij]}$ داریم:

$$\rho \dot{\underline{l}} = \rho \underline{g} + \operatorname{div} \underline{C} + \underline{t}_x \quad , \quad \underline{t}_x = T^{ik} \underline{g}_i \times \underline{g}_k$$

و می‌توان ترکیبی اصل تعادل ممنتوم زاویه‌ای را نیز به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dt}\int_R \underline{x} \times \rho \underline{v}\, dv = \int_R \underline{x} \times \rho \underline{b}\, dv + \int_{\partial R} \underline{x} \times \underline{t}\, da - \int_R \underline{t}_x\, dv$$

تعادل انرژی برای مواد قطبی

کل توان مکانیکی تأمین شده به جسم عبارت است از

$$P = \int_R (\rho \underline{b}\cdot\underline{v} + \rho \underline{g}\cdot\underline{\omega})\, dv + \int_{\partial R} (\underline{t}\cdot\underline{v} + \underline{c}\cdot\underline{\omega})\, da$$

$$\underline{\omega} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Curl} \underline{v} \quad , \quad \omega^i = -\tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk} W_{jk}$$

$\underline{\omega}$ بردار چرخش تانسور گردابی است.

$$\int_{\partial R} (\underline{t}\cdot\underline{v} + \underline{c}\cdot\underline{\omega})\, da = \int_{\partial R} (\underline{t}^i\cdot\underline{v} + \underline{c}^i\cdot\underline{\omega})\, n_i\, da$$

$$= \int_R (\underline{t}^i_{,i}\cdot\underline{v} + \underline{t}^i\cdot\underline{v}_{,i} + \underline{c}^i_{,i}\cdot\underline{\omega} + \underline{c}^i\cdot\underline{\omega}_{,i})\, dv$$

$$P = \int_R \Big(\underbrace{(\rho \underline{b} + \underline{t}^i_{,i})}_{\rho \underline{a}}\cdot\underline{v} + \underbrace{(\rho \underline{g} + \underline{c}^i_{,i})}_{\rho\dot{\underline{l}} - \underline{t}_x}\cdot\underline{\omega} + \underline{t}^i\cdot\underline{v}_{,i} + \underline{c}^i\cdot\underline{\omega}_{,i}\Big)\, dv$$

از طرفی داریم:

$$\underline{t}^i\cdot\underline{v}_{,i} = T^{ik}\underline{g}_k\cdot(v_j \underline{g}^j)_{,i} = T^{ij} v_{j|i}$$

$$\underline{c}^i\cdot\underline{\omega}_{,i} = C^{ij}\omega_{j|i} \quad , \quad \omega_{j|i}$$ تانسور انحنا : $\omega^i|_i = 0$

با جایگذاری داریم

$$P = \int_R \big(\rho \underline{a}\cdot\underline{v} + (\rho\dot{\underline{l}} - \underline{t}_x)\cdot\underline{\omega} + T^{ij} v_{j|i} + C^{ij}\omega_{j|i}\big)\, dv$$

از طرفی کل انرژی جزء R عبارت است از

کل انرژی جزء R $= \int_R \big(\rho(\epsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}) + \tfrac{1}{2}\rho\,\underline{l}\cdot\underline{\omega}\big)\, dv$

پس توان تأمین شده به جسم صرف تغییرات انرژی جنبشی می‌شود

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho(\epsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v} + \tfrac{1}{2}\underline{l}\cdot\underline{\omega})\, dv = P + \int_R \rho r\, dv - \int_{\partial R} h\, da$$

$$\int_R \rho(\dot{\epsilon} + \underline{a}\cdot\underline{v} + \tfrac{1}{2}\dot{\underline{l}}\cdot\underline{\omega} + \tfrac{1}{2}\underline{l}\cdot\underline{\alpha})\, dv = P +$$ توان حرارتی

$$\rho(\dot{\epsilon} - \tfrac{1}{2}\dot{\underline{l}}\cdot\underline{\omega} + \tfrac{1}{2}\underline{l}\cdot\underline{\alpha}) = T^{ij} v_{j|i} - \underline{t}_x\cdot\underline{\omega} + C^{ij}\omega_{j|i} + \rho r - q^i|_i$$

رابطه فوق در واقع فرم موضعی اصل تعادل انرژی یا قانون اول ترمودینامیک است.

$$T^{ij} v_{j,i} = T^{(ij)} D_{ij} + T^{[ij]} W_{ji}$$

از طرفی

$$W_{ji} = -\varepsilon_{jik}\, \omega^{k}$$

$$\underset{\sim}{t}_x = \varepsilon^{ikj}\, T_{[ik]}\, g_j$$

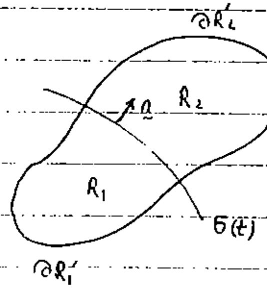
در نتیجه

$$\underset{\sim}{t}_x \cdot \underset{\sim}{\omega} = -\varepsilon^{ikj}\, T_{[ik]}\, \omega_j$$

پس معادله انرژی به صورت زیر در می‌آید

$$\rho(\dot{\varepsilon} - \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{l}\cdot\underset{\sim}{\omega} + \tfrac{1}{2}\underset{\sim}{l}\cdot\underset{\sim}{\alpha}) = T^{(ij)} D_{ij} + C^{ij}\omega_{j,i} + \rho r - q^{i}{}_{,i}$$

شرایط پرش برای سطح گسستگی



$$R = R_1 \cup R_2$$

$$\partial R = \partial R_1' \cup \partial R_2'$$

$$\partial R_1 = \partial R_1' \cup \sigma(t)$$

$$\partial R_2 = \partial R_2' \cup \sigma(t)$$

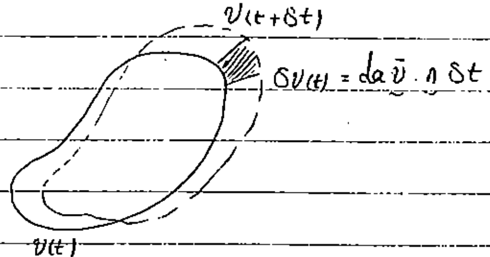
اگر u_n سرعت σ در راستای عمود بر خودش باشد، V_1 سرعت ماده در R_1 در مرز σ و V_2 سرعت ماده در R_2 در مرز σ، با در نظر گرفتن:

$$V_{1n} \triangleq \underset{\sim}{V_1}\cdot\underset{\sim}{n} \qquad W_{1n} \triangleq \underset{\sim}{V_1}\cdot\underset{\sim}{n} - u_n = V_{1n} - u_n$$

$$V_{2n} \triangleq \underset{\sim}{V_2}\cdot\underset{\sim}{n} \qquad W_{2n} \triangleq \underset{\sim}{V_2}\cdot\underset{\sim}{n} - u_n = V_{2n} - u_n$$

$$[\![W_n]\!] = W_{2n} - W_{1n} = V_{2n} - V_{1n}$$

$$\frac{d}{dt}\int_R f(\underset{\sim}{x},t)\, dv = ?$$



اگر سرعت مرزی ناحیه $v(t)$ برابر با $\bar{v}$ باشد در این صورت مشتق انتگرال زیر را داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{v(t)} f(\underset{\sim}{x},t)\, dv = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{v(t+\delta t)} f(\underset{\sim}{x},t+\delta t)\, dv - \int_{v(t)} f(\underset{\sim}{x},t)\, dv\Big]$$

ازطرفی

$$v(t+\delta t) = v(t) + \delta v(t)$$

چون زمان پیوسته است داریم

$$|f(\underset{\sim}{x}, t+\delta t) - f(\underset{\sim}{x}, t)| < \epsilon K$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{v(t)} [f(\underset{\sim}{x}, t+\delta t) - f(\underset{\sim}{x}, t)]\, dv + \int_{\delta v(t)} [f(\underset{\sim}{x}, t+\delta t) - f(\underset{\sim}{x}, t)]\, dv + \int_{\delta v(t)} f(\underset{\sim}{x}, t)\, dv \right]$$

$$= \int_{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\delta v(t)} f(\underset{\sim}{x}, t)\, dv$$

$$= \int_{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial v(t)} f\, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, da$$

لذا برای حجم معیار ثابت داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_{v} f(\underset{\sim}{x}, t)\, dv = \int_{v} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv$$

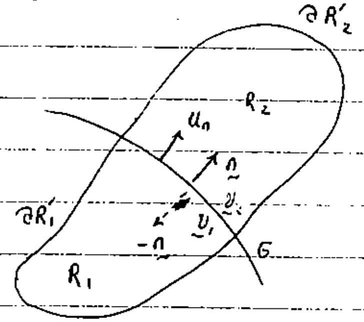
$$\frac{d}{dt} \int_{R} f(\underset{\sim}{x}, t)\, dv = ? = \frac{d}{dt} \int_{R_1} f\, dv + \frac{d}{dt} \int_{R_2} f\, dv$$

$$\frac{d}{dt} \int_{R_1} f\, dv = \int_{R_1} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial R_1'} f\, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, da + \int_{\sigma} f_1 u_n\, da$$

$$= \int_{R_1} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial R_1'} f\, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, da + \int_{\sigma} f_1\, \underset{\sim}{v}_1 \cdot \underset{\sim}{n}\, da + \int_{\sigma} f_1 u_n\, da$$

$$- \int_{\sigma} f_1\, \underset{\sim}{v}_1 \cdot \underset{\sim}{n}\, da$$

$$= \int_{R_1} \frac{\partial f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial R_1} f\, \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n}\, da - \int_{\sigma} f_1 \omega_{1n}\, da$$



$$v_{1n} \triangleq \underset{\sim}{v}_1 \cdot \underset{\sim}{n}$$

$$v_{2n} \triangleq \underset{\sim}{v}_2 \cdot \underset{\sim}{n}$$

$$\omega_{1n} \triangleq v_{1n} - u_n$$

$$\omega_{2n} \triangleq v_{2n} - u_n$$

$$[\![f]\!] = f_2 - f_1$$

سطح σ : سطحی است که در آن f برروی آن دارای گسستگی است. به بیان دیگر پیوسته نیست.

$$\frac{d}{dt}\int_{R_2} f(\underset{\sim}{x},t)\,dv = \int_{R_2}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial R_2'} f\,\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\,da - \int_{\sigma} f_2\,u_n\,da$$

$$= \int_{R_2}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial R_2'} f\,\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\,da - \int_{\sigma} f_2\,\underset{\sim}{v}_2\cdot\underset{\sim}{n}\,da$$

$$+ \int_{\sigma} f_2\,\underset{\sim}{v}_2\cdot\underset{\sim}{n}\,da - \int_{\sigma} f_2\,u_n\,da$$

$$= \int_{R_2}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{\partial R_2} f\,\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\,da + \int_{\sigma} f_2\,\omega_{2n}\,da$$

$$= \int_{R_2}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \int_{R_2}\mathrm{div}\,(f\underset{\sim}{v})\,dv + \int_{\sigma} f_2\,\omega_{2n}\,da$$

لذا در حالت کلی با جمع روابط فوق داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{R} f(\underset{\sim}{x},t)\,dv = \int_{R_1}(\dot{f} + f\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv +$$

$$+ \int_{R_2}(\dot{f} + f\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv + \int_{\sigma}[\![f\omega_n]\!]\,da$$

رابطه فوق الحاق قضیه ترابرد رینولدز:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}\,(f\underset{\sim}{v}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{\nabla} f + f\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v} = \dot{f} + f\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v}$$

اصل بقای جرم در سطوح گسستگی

$$\frac{d}{dt}\int_{R}\rho\,dv = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{R}\rho\,dv = \int_{R_1}(\dot{\rho} + \rho\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv + \int_{R_2}(\dot{\rho} + \rho\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv$$

$$+ \int_{\sigma}[\![\rho\omega_n]\!]\,da = 0 \qquad \therefore\quad [\![\rho\omega_n]\!] = 0$$

اصل بقای ممنتم خطی در سطوح گسستگی

$$\frac{d}{dt}\int_{R}\rho\underset{\sim}{v}\,dv = \int_{R}\rho\underset{\sim}{b}\,da + \int_{\partial R}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da$$

از طرفی

$$\int_{\partial R}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da = \int_{\partial R_1'}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da + \int_{\partial R_2'}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da$$

$$+ \int_{\sigma}{}_1\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da + \int_{\sigma}{}_2\underset{\sim}{t}(-\underset{\sim}{n})\,da - \int_{\sigma}{}_1\underset{\sim}{t}\,da - \int_{\sigma}{}_2\underset{\sim}{t}\,da$$

$$= \int_{\partial R_1}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da + \int_{\partial R_2}\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{n})\,da + \int_{\sigma}[\![\underset{\sim}{t}]\!]\,da$$

حال معادله بقای ممنتم را بکار می بریم:

$$\int_{R_1}(\rho\dot{\underset{\sim}{v}} + \rho\underset{\sim}{v}\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv + \int_{R_2}(\rho\dot{\underset{\sim}{v}} + \rho\underset{\sim}{v}\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,dv + \int_{\sigma}[\![\rho\underset{\sim}{v}\omega_n]\!]\,da$$

$$= \int_{R_1} \rho \underline{b}\, dv + \int_{R_2} \rho \underline{b}\, dv + \int_{\partial R_1} \underline{t}(\underline{n})\, da + \int_{\partial R_2} \underline{t}(\underline{n})\, da + \int_{G} [\![\underline{t}]\!]\, da$$

لذا معادله تعادل ممنتم خطی شرط جهش زیر را بدست می‌دهد

$$\int_{G} \left([\![\rho \underline{v} w_n]\!] - [\![\underline{t}]\!] \right) da = 0$$

$$\therefore \quad [\![\rho \underline{v} w_n - \underline{t}]\!] = \underline{0}$$

تعادل ممنتم زاویه‌ای شرط جدیدی بر روی سطح گسستگی بدست نمی‌دهد، لذا به سراغ تعادل انرژی می‌پردازیم

تعادل انرژی بر روی سطوح گسستگی

$$\frac{d}{dt}\int_{R} \rho \left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}\right) dv = \int_{R} \rho \left(\underline{b}\cdot\underline{v} + r\right) dv + \int_{\partial R} \left(\underline{t}\cdot\underline{v} - h\right) da$$

از طرفی داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{R} \rho \left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}\right) dv = \int_{R_1} \rho \left(\dot{\varepsilon} + \underline{v}\cdot\underline{a}\right) dv + \int_{R_2} \rho \left(\dot{\varepsilon} + \underline{v}\cdot\underline{a}\right) dv + \int_{G} [\![\rho \left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}\right) W_n]\!]\, da$$

و نیز

$$\int_{\partial R} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da = \int_{\partial R_1'} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da + \int_{\partial R_2'} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da$$

$$+ \int_{G} ({}_1\underline{t}\cdot\underline{v}_1 - {}_1h)\, da + \int_{G} ({}_2\underline{t}(-\underline{n})\cdot\underline{v}_2 - {}_2h(-\underline{n}))\, da$$

$$- \int_{G} ({}_1\underline{t}\cdot\underline{v}_1 - {}_1h)\, da + \int_{G} ({}_2\underline{t}\cdot\underline{v}_2 - {}_2h)\, da$$

$$= \int_{\partial R_1} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da + \int_{\partial R_2} (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)\, da + \int_{G} [\![\underline{t}\cdot\underline{v} - h]\!]\, da$$

حال در رابطه تعادل انرژی جای‌گذاری نموده و شرط جهش برای این معادله را استخراج می‌کنیم

$$[\![\rho \left(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}\right) W_n - (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)]\!] = 0$$

قانون دوم ترمودینامیک بر روی سطوح گسستگی

$$\frac{d}{dt}\int_{R} \rho \eta\, dv \geq \int_{R} \rho \frac{r}{\theta}\, dv - \int_{\partial R} \frac{h}{\theta}\, da$$

از طرفی داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_{R} \rho \eta\, dv = \int_{R_1} \rho \dot{\eta}\, dv + \int_{R_2} \rho \dot{\eta}\, dv + \int_{G} [\![\rho \eta W_n]\!]\, da$$

و نیز

$$\int_{\partial R} \frac{h}{\theta}\, da = \int_{\partial R_1'} \frac{h}{\theta}\, da + \int_{\partial R_2'} \frac{h}{\theta}\, da$$

Simara

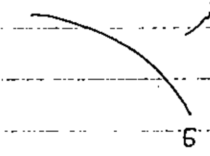
$$\int_{\partial R} \frac{h}{\theta}\, da = \int_{\partial R_1} \frac{h}{\theta}\, da + \int_{\partial R_2} \frac{h}{\theta}\, da + \int_{\sigma} [\![\frac{h}{\theta}]\!]\, da$$

با جایگذاری در رابطه اخیر و با ساده‌سازی رابطه به صورت زیر در می‌آید

توازن انرژی:
$$[\![\rho(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v}) W_n - (\underline{t}\cdot\underline{v} - h)]\!] = 0$$

نامساوی آنتروپی
$$[\![\rho \eta W_n + h/\theta]\!] \geq 0.$$

معادله سطح گسستگی



اگر $x^i = f^i(y^1, y^2, t)$

$$u_n = n_i \frac{\partial f^i}{\partial t}$$

اگر $f(x^1, x^2, x^3, t) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla} f = 0 \qquad \underline{\nabla} f = |\nabla f|\, \underline{n}$$

$$u_n = -\frac{\partial f/\partial t}{|\underline{\nabla} f|}$$

شرط جهش برای بالانس آنتروپی — Green & Naghdi

گرین و نقدی با استفاده از قانون انتقال که ترودل و تروپین (Truesdell & Toupin) استخراج کردند، شرط جهش برای سطح گسستگی را برای آنتروپی با استفاده از بالانس آنتروپی، طی مقاله‌ای ارائه کردند. از قبل می‌دانیم که:

$$\frac{d}{dt}\int_R f(\underline{x},t)\, dv = \int_{R_1} (\dot f + f \operatorname{div} \underline{v})\, dv + \int_{R_2} (\dot f + f \operatorname{div} \underline{v})\, dv + \int_{\sigma} [\![f W_n]\!]\, da$$

$$= \int_{R_1} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial R_1'} f \underline{v}\cdot\underline{n}\, da + \cancel{\int_{\sigma} f_1 \underline{v}_1\cdot\underline{n}\, da}$$

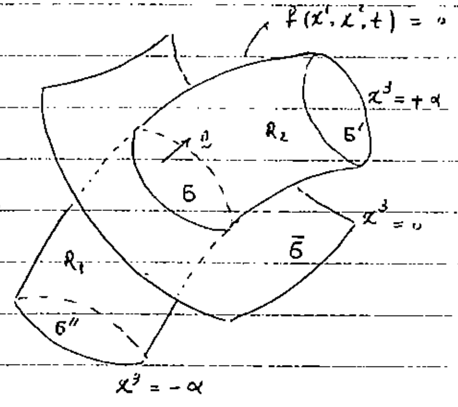
$$+ \int_{R_2} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial R_2'} f \underline{v}\cdot\underline{n}\, da - \cancel{\int_{\sigma} f_2 \underline{v}_2\cdot\underline{n}\, da}$$

$$+ \int_{\sigma} f_2 (\cancel{\underline{v}_2\cdot\underline{n}} - u_n)\, da - \int_{\sigma} f_1 (\cancel{\underline{v}_1\cdot\underline{n}} - u_n)\, da$$

$$\frac{d}{dt}\int_R f(\underline{x},t)\, dv = \int_R \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial R} f \underline{v}\cdot\underline{n}\, da - \int_{\sigma} [\![f]\!] u_n\, da$$

رابطه فوق توسط ترودل و تروپین استخراج شده است. حال معادله توازن آنتروپی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\zeta\, dv = \int_R \rho(s+\xi)\, dv - \int_{\partial R} h\, da \qquad s = r/\theta \;, \; h = h/\theta$$



$$\underset{\sim}{r}\,(x^1, x^2, x^3, t)$$

$$\underset{\sim}{r} = \bar{\underset{\sim}{r}}(x^1, x^2, t) + x^3\, \underset{\sim}{n}\,(x^1, x^2, t)$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\varphi\, dv = \int_R \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dv + \int_{\partial R} \rho\varphi\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\, da - \int_\sigma [\![\rho\varphi]\!]\, u_n\, da$$

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho\zeta\, dv = \int_R \rho(s+\xi)\, dv - \int_{\partial R} h\, da$$

$$\int_\sigma \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{\partial(\rho\zeta)}{\partial t} - \rho\,(s+\xi)\right) dx^3\, da + \int_{\partial\sigma}\int_{-\alpha}^{+\alpha} (\rho\zeta\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n} + h)\, dx^3\, da$$

$$+ \int_{\sigma'} (\rho\zeta\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n} + h)_{x^3=+\alpha}\, da' + \int_{\sigma''} (\rho\zeta\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n} + h)_{x^3=-\alpha}\, da''$$

$$- \int_\sigma [\![\rho\zeta]\!]\, u_n\, da = 0$$

$$\rho\bar{\xi} = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho\xi\, dx^3$$

$$\int_\sigma [\![\rho\zeta\, \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n} + h]\!]\, da - \int_\sigma [\![\rho\zeta]\!]\, u_n\, da - \int_\sigma \rho\bar{\xi}\, da = 0$$

$$\therefore \rho\bar{\xi} = [\![\rho\zeta\, w_n + h]\!]$$

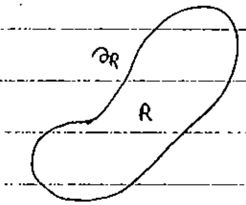
اصل دالامبر «اصل کار مجازی»

اگر مجموعه $\mathcal{C}$ مجموعه تمام توابع برداری پیوسته باشد، در این صورت $\underline{\eta}(\underline{x}) \in \mathcal{C}$

if: $\forall\, \underline{\eta}(\underline{x}) \in \mathcal{C}$ $\quad \int_R \underline{\omega}(\underline{x})\cdot\underline{\eta}(\underline{x})\,dv = 0 \quad \therefore \quad \underline{\omega}(\underline{x}) \equiv \underline{0}$

حال اگر محیط پیوسته R را در نظر بگیریم که معادلات تعادل در آن برقرار است

$\operatorname{div}\underline{T} + \rho\underline{b} = \rho\underline{a} = \rho\dot{\underline{v}} \qquad \underline{T} = \underline{T}^T$



∂R_1 : شرایط مرزی هندسی

$\underline{x} \in \partial R_1 \quad \underline{r}(\underline{x},t) = \underline{r}$

∂R_2 : شرایط مرزی دینامیکی $\qquad \partial R = \partial R_1 \cup \partial R_2$

$\underline{x} \in \partial R_2 \quad \underline{S} = \underline{n}\cdot\underline{T} = \underline{S}(\underline{x},t)$

حال اگر $\underline{\eta}(\underline{x})$ را از مجموعه توابع برداری با مشتق پیوسته به طوری که $\underline{\eta}(\underline{x}) = \underline{0}$, $\underline{x} \in \partial R_1$ در نظر بگیریم

$\underline{\eta}(\underline{x}) \in \mathcal{C} \quad , \quad \underline{\eta}(\underline{x}) \in C^1[R] \,,\; \underline{\eta}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \partial R_1$

$T^{ji}|_j + \rho b^i = \rho \dot{v}^i$

$T^{ji}|_j\,\eta_i + \rho b^i \eta_i = \rho\dot{v}^i \eta_i$

از طرفی: $\operatorname{div}\underline{T}^T\cdot\underline{\eta} = \operatorname{div}(\underline{T}^T\underline{\eta}) - \underline{T}\cdot\operatorname{grad}\underline{\eta}$

$T^{ji}|_j\,\eta_i = (T^{ji}\eta_i)|_j - T^{ji}\eta_{i|j}$

با انتگرال گیری بر روی R داریم:

$$\int_{\partial R} T^{ji}\eta_i n_j\,da + \int_R \rho(b^i - \dot{v}^i)\eta_i\,dv = \int_R T^{ji}\eta_{i|j}\,dv$$

$$\int_{\partial R_2} S^i\eta_i\,da + \int_R \rho(b^i - \dot{v}^i)\eta_i\,dv = \int_R T^{ji}\eta_{i|j}\,dv$$

با تغییر برداری داریم:

$$\int_{\partial R_2} \underline{S}\cdot\underline{\eta}(\underline{x})\,da + \int_R \rho(\underline{b} - \dot{\underline{v}})\cdot\underline{\eta}(\underline{x})\,dv = \int_R \underline{T}\cdot\operatorname{grad}\underline{\eta}\,dv$$

رابطه فوق اصل دالامبر نام دارد. حال اگر رابطه فوق را به عنوان یک اصل قبول کنیم می‌توانیم معادلات تعادل و شرایط مرزی را از روی آن استخراج کنیم.

$$\int_{\partial R_2} \underline{S}\cdot\underline{\eta}(\underline{x})\,da + \int_R \rho(\underline{b} - \dot{\underline{v}})\,\underline{\eta}(\underline{x})\,dv = \int_R \underline{T}\cdot\operatorname{grad}\underline{\eta}\,dv$$

$\forall\, \underline{\eta}(\underline{x}) \in \mathcal{C} \quad , \quad \underline{\eta}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \partial R_1$

$\underline{T}\cdot\operatorname{grad}\underline{\eta} = T^{ji}\eta_{i|j} = (T_s^{ji} + T_a^{ji})(\eta^s_{i|j} + \eta^a_{i|j})$

$= T_s^{ji}\eta_{i|j} + T_a^{ji}\eta^a_{i|j} = (T_s^{ji}\eta_i)|_j - T_s^{ji}|_j\,\eta_i + T_a^{ji}\eta^a_{i|j}$

$$\int_R \underline{T}\cdot\operatorname{grad}\underline{\eta}\,dv = \int_{\partial R} n_j T_s^{ji}\eta_i\,da - \int_R T_s^{ji}|_j\,\eta_i\,dv + \int_R T_a^{ji}\eta^a_{i|j}\,dv$$

$$\int_{\partial R_2} (s^i - n_j T_s^{ji})\,\eta_i\, da + \int_R (T_s^{ji}{}_{,j} + \rho b^i - \rho \dot{v}^i)\,\eta_i\, dv$$

$$= \int_R T_a^{ji}\, \eta^a_{i,j}\, dv$$

حال η را از ح چنان انتخاب می‌کنیم که در شرایط زیر صدق کند

$\eta(x) = 0 \quad \& \quad x \in \partial R_2$

$\eta^a_{i,j} = 0$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که

$$\int_R (T_s^{ji}{}_{,j} + \rho b^i - \rho \dot{v}^i)\,\eta_i\, dv = 0$$

$\therefore \quad T_s^{ji}{}_{,j} + \rho b^i = \rho \dot{v}^i$

بار دیگر $\eta(x)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که تنها در شرط زیر صدق کند

$\eta^a_{i,j} = 0$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{\partial R_2} (s^i - n_j T_s^{ji})\,\eta_i\, da = 0$$

$\therefore \quad s^i = n_j T_s^{ji} \quad , \quad s = n \cdot T$

در نهایت با انتخاب $\eta^a_{i,j} \neq 0$ نتیجه می‌گیریم که

$T_a^{ji} = 0 \quad \therefore \quad T = T^T$

اگر تابع $\eta(x) = \delta u(x)$ یک جابجایی مجازی باشد در این صورت اصل کار مجازی استخراج می‌شود.

داریم:

$$\delta W_e = \int_{\partial R_2} s \cdot \delta u\, da + \int_R \rho\, b \cdot \delta u\, dv$$

کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی

کار مجازی انجام شده توسط نیروی اینرسی: $\delta W_I = -\int_R \rho\, \dot{v} \cdot \delta u\, dv$

$$\delta W_i = \int_R T \cdot \mathrm{grad}(\delta u)\, dv = \int_R T \cdot \delta \varepsilon\, dv$$

روابط فوق را می‌توان در توصیف مرجع نیز نوشت

T_0: تنسور تنش پیولای نوع اول (غیرمتقارن) $\quad \mathrm{Div}\, T_0^T + \rho_0 b = \rho_0 \dot{v}$

$\eta(x) \in$ ح

$\eta(x) = 0 \quad x \in \partial R_2^0$

$\mathrm{Div}\, T_0^T \cdot \eta = \mathrm{Div}(T_0 \cdot \eta) - T_0^T\, \mathrm{Grad}\, \eta$

$$\int_{\partial R_2^0} N \cdot T_0 \cdot \eta\, dA + \int_{R^0} \rho_0 (b - \dot{v}) \cdot \eta\, dV = \int_{R^0} T_0^T \cdot \mathrm{Grad}\, \eta\, dV$$

$$\int_{\partial R_2^0} S^0 \cdot \eta\, dA + \int_{R^0} \rho_0 (b - \dot{v}) \cdot \eta\, dV = \int_{R^0} T_0^T \cdot \mathrm{Grad}\, \eta\, dV$$

تنش فرضی: $S^0 = N \cdot T_0 \quad ; \quad T_0^T\, \mathrm{Grad}\, \eta = T_0^T \cdot \delta F$

برحسب تانسور پیولای متقارن نیز می‌توان اصل بالا را نوشت

$T_0^T = F \cdot S$

$$\underset{\sim}{T}^T \, \mathrm{Grad}\, \underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{F}^T \mathrm{Grad}\, \underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{S} \cdot \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{F}^T \mathrm{Grad}\, \underset{\sim}{\eta} + (\mathrm{Grad}\, \underset{\sim}{\eta})^T \underset{\sim}{F} \right)$$

$$= \underset{\sim}{S} \cdot \delta \underset{\sim}{E}$$

Gateaux Derivative (Frechet)

رابطه زیر مشتق گتو (Gateaux) $f(\underset{\sim}{x})$ در راستای میدان برداری $\underset{\sim}{\eta}$ خوانده می‌شود

$$\left\{ \frac{d}{ds}\left(f(\underset{\sim}{x} + s\underset{\sim}{h}) \right)\Big|_{s=0} \right\}\Big|_{\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{\eta}}$$

$$\frac{d}{ds}(x^i_{,A}) = \frac{d}{ds}(x^i + s\eta^i)_{,A} = \delta x^i_{;A} = \delta \underset{\sim}{F}$$

$$\underset{\sim}{E} = 1/2\,(\underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{F} - \underset{\sim}{I})$$

$$\delta \underset{\sim}{E} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left[(\underset{\sim}{F} + s\,\mathrm{Grad}\,\underset{\sim}{\eta})^T (\underset{\sim}{F} + s\,\mathrm{Grad}\,\underset{\sim}{\eta}) - \underset{\sim}{I} \right]_{s=0}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{F}^T \mathrm{Grad}\,\underset{\sim}{\eta} + (\mathrm{Grad}\,\underset{\sim}{\eta})^T \underset{\sim}{F} \right]$$

معادلات «متشکله» تئوری غیر مکانیکی

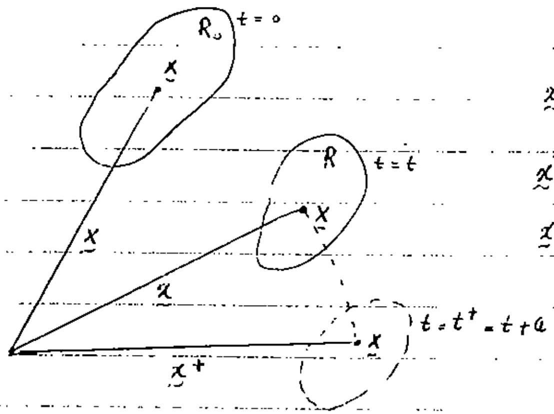
$$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{T} + \rho \underset{\sim}{b} = \rho \underset{\sim}{a} \qquad (\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T)$$

فرض کنید تابع نیروی $\underset{\sim}{x}$ معلوم باشد در این صورت رابطه فوق در تعیین بدست آوردن
تانسور تنش مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به نامعین بودن معادلات دیفرانسیل فوق
نتیجه می‌گیریم که اصولاً اصول اولیه ضروری لازم مسائل فیزیکی کامل نیست

ملاحظات و اصول عادلیه در روابط معادلات متشکله

Noll در سال 1950 ... سه اصل را در معادلات متشکله پایه‌گذاری کرد

1) Principle of Determinism — اصل تعیین ?
2) Principle of Local Action.
3) Principle of Material Frame Indifference.



حرکت صلب الحاقی

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{X}, t) \;;\; \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{\chi}^+(\underset{\sim}{X}, t^+)$$

$$\underset{\sim}{x}^+ = \hat{\underset{\sim}{\chi}}^+(\underset{\sim}{x}, t)$$

$$\underset{\sim}{x}^+ = \underset{\sim}{Q}(t)\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{a}(t)$$

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{I}$$

$$\det Q = +1$$

پاسخ جسم می‌بایست مستقل از حرکت صلب اتاقی باشد، لذا به عنوان اصل سوم می‌توانیم، عدم تغییر تحت حرکت صلب را مورد توجه قرار دهیم.

3) Invariance Under Superposed Rigid Body Motion.

$$|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}| = |\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{y}^+| \quad \forall\ \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}$$

$$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}, t) = \underset{t=-\infty}{\overset{t}{\mathcal{F}}}(\underset{\sim}{\chi}^t, \underset{\sim}{x}, t)$$

$$\underset{\sim}{T}^+(\underset{\sim}{x}, t^+) = \underset{t=-\infty}{\overset{t^+}{\mathcal{F}}}(\underset{\sim}{\chi}^{t^+}, \underset{\sim}{x}, t^+)$$

در خصوص روابط سینماتیکی داریم

$$F^{+i}{}_{A} = \frac{\partial \chi^{+i}}{\partial X^A} = \frac{\partial x^{+i}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial X^A} = \frac{\partial(Q^i{}_m x^m + c^i)}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial X^A}$$

$$F^{+i}{}_{A} = Q^i{}_j F^j{}_A \quad \text{or} \quad \underset{\sim}{F}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}$$

و نیز در مورد تانسور کرنش

$$J^+ = J, \quad \rho^+ = \rho$$

$$\underset{\sim}{C}^+ = \underset{\sim}{F}^{+T}\underset{\sim}{F}^+ = (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})^T(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{C} \quad \therefore \underset{\sim}{E}^+ = \underset{\sim}{E}$$

$$\underset{\sim}{B}^+ = \underset{\sim}{F}^+\underset{\sim}{F}^{+T} = (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F})^T = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{Q}^T \quad \therefore \underset{\sim}{e}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

$$\underset{\sim}{V}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

همچنین در مورد سرعت داریم:

$$\underset{\sim}{v}^+ = \frac{d\underset{\sim}{x}^+}{dt^+} = \frac{d\underset{\sim}{x}^+}{dt} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{x} + \dot{\underset{\sim}{c}}$$

$$= \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}^T(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{c}) + \dot{\underset{\sim}{c}}$$

$$\underset{\sim}{v}^+ = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{c}) + \dot{\underset{\sim}{c}} \qquad \underset{\sim}{\Omega} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}^T \equiv \underset{\sim}{\omega}$$

$$= \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\omega}\times(\underset{\sim}{x}^+ - \underset{\sim}{c}) + \dot{\underset{\sim}{c}}$$

در مورد تانسور گرادیان سرعت داریم

$$\underset{\sim}{L}^+ = \frac{\partial \underset{\sim}{v}^+}{\partial \underset{\sim}{x}^+} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega}$$

$$\underset{\sim}{D}^+ = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}^+ + \underset{\sim}{L}^{+T}) = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

$$\underset{\sim}{W}^+ = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{L}^+ - \underset{\sim}{L}^{+T}) = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega}$$

در مورد المان سطح داریم:

$$da^+\underset{\sim}{n}^+ = J^+(F^+)^{-T}\underset{\sim}{N}\,dA = da\,\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{n}$$

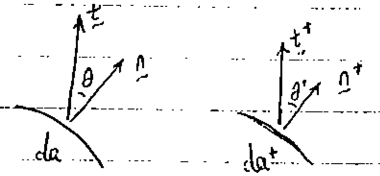
$$(da^+)^2\,\underset{\sim}{n}^+\cdot\underset{\sim}{n}^+ = (da)^2\,\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{n} \quad \therefore (da^+)^2 = (da)^2$$

$$\therefore \underset{\sim}{n}^+ = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{n}$$

در مورد المان حجم نیز:

$$dv^+ = J^+\,dV = J\,dV = dv$$

تبدیل تنش تحت حرکت صلب اتاقی



$$\theta^+ = \theta$$

$$|\underset{\sim}{t}^+| = |\underset{\sim}{t}|$$

" حرکت صلب اتاقی "

$$\underset{\sim}{t}^+\cdot\underset{\sim}{n}^+ = \underset{\sim}{t}\cdot\underset{\sim}{n}$$

$$\underset{\sim}{t}^+\cdot\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{t}\cdot\underset{\sim}{n}$$

$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{T} \qquad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^T$

$\underset{\sim}{t}^* = \underset{\sim}{n}^* \cdot \underset{\sim}{T}^* \qquad \underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{T}^{*T} \qquad \therefore \underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T$

$\therefore \underset{\sim}{t}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{t}$

همینطور می‌توان قانون تبدیل تانسورهای تنش پیولا را نیز استخراج کرد

$J\,\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{T}_0$

$J^*\underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{F}^*\underset{\sim}{T}_0^* = J\,\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{T}_0^*$

$\therefore \underset{\sim}{T}_0^* = J\,\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{T}_0\,\underset{\sim}{Q}^T$

$\underset{\sim}{T}_0^T = \underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{S}$

$(\underset{\sim}{T}_0^*)^T = \underset{\sim}{F}^*\underset{\sim}{S}^*$

$\therefore \underset{\sim}{S}^* = \underset{\sim}{S}$

Reiner - Rivlin Fluid

$\underset{\sim}{T} = \tilde{\underset{\sim}{T}}(\rho, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{L}) \qquad \underset{\sim}{T}^* = \tilde{\underset{\sim}{T}}(\rho^*, \underset{\sim}{v}^*, \underset{\sim}{L}^*)$

$\underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T, \quad \rho^* = \rho, \quad \underset{\sim}{v}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{\Omega}(\underset{\sim}{x}^* - \underset{\sim}{c}) + \dot{\underset{\sim}{c}}$

$\underset{\sim}{L}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{\Omega}$

اگر یک حرکت انتقالی را در نظر بگیریم $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{I},\ \dot{\underset{\sim}{Q}} = 0$

$\tilde{T}(\rho, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{L}) = \tilde{T}(\rho, \underset{\sim}{v} + \dot{\underset{\sim}{c}}, \underset{\sim}{L})$

لذا تابعیت $\underset{\sim}{v}$ نقض می‌شود لذا داریم:

$\underset{\sim}{T} = \hat{\underset{\sim}{T}}(\rho, \underset{\sim}{L}) = \hat{\underset{\sim}{T}}(\rho, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{W})$

$\underset{\sim}{T}^* = \hat{\underset{\sim}{T}}(\rho^*, \underset{\sim}{D}^*, \underset{\sim}{W}^*)$

حال اگر حرکت جسم صلب اتفاقی $\underset{\sim}{\Omega} = \dot{\underset{\sim}{Q}},\ \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{I}$ را در نظر بگیریم داریم:

$\underset{\sim}{D}^* = \underset{\sim}{D} \quad , \quad \underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{T} \quad . \quad \underset{\sim}{W}^* = \underset{\sim}{\Omega} + \underset{\sim}{W}$

$\hat{\underset{\sim}{T}}(\rho, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{W}) = \hat{\underset{\sim}{T}}(\rho, \underset{\sim}{D}, \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{\Omega})$

لذا تابعیت $\underset{\sim}{W}$ نیز نقض می‌شود در نهایت داریم:

$\underset{\sim}{T} = \hat{T}(\rho, \underset{\sim}{D})$

$\therefore \quad \underset{\sim}{Q}\,\hat{T}(\rho, \underset{\sim}{D})\,\underset{\sim}{Q}^T = \hat{T}(\rho, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q}^T) \qquad \forall\ \underset{\sim}{Q}$ متعامد

جسم الاستیک کوشی

$$\underline{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{F})$$

$$\underline{T}^{+} = \hat{\underline{T}}(\underline{F}^{+})$$

$$\underline{Q}\,\hat{\underline{T}}(\underline{F})\,\underline{Q}^{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{Q}\,\underline{F})$$

$$\hat{\underline{T}}(\underline{F}) = \underline{Q}^{T}\,\hat{\underline{T}}(\underline{Q}\,\underline{F})\,\underline{Q} \qquad \forall\, \underline{Q} \;\; s.t \;\; \underline{Q}\underline{Q}^{T} = \underline{I}$$

$$\underline{F} = \underline{R}\,\underline{U}$$

حال اگر $\underline{Q} = \underline{R}^{T}$ در نظر گرفته شود داریم:

$$\hat{\underline{T}}(\underline{F}) = \underline{R}\,\hat{\underline{T}}(\underline{U})\,\underline{R}^{T}$$

$$= \underline{F}\,\underline{U}^{-1}\,\hat{\underline{T}}(\underline{U})\,\underline{U}^{-T}\,\underline{F}^{T}$$

$$\hat{\underline{T}}(\underline{F}) = \underline{F}\,\bar{\underline{T}}(\underline{U})\,\underline{F}^{T} = \underline{F}\,\bar{\bar{\underline{T}}}(\underline{C})\,\underline{F}^{T}$$

$$= \underline{F}\,\tilde{\underline{T}}(\underline{E})\,\underline{F}^{T}$$

همچنان ثابت نیز هست زیرا

$$\underline{T} = \underline{F}\,\tilde{\underline{T}}(\underline{E})\,\underline{F}^{T}$$

$$\underline{T}^{+} = \underline{Q}\,\underline{T}\,\underline{Q}^{T} = \underline{Q}\,\underline{F}\,\tilde{T}(\underline{E})\,\underline{F}^{T}\underline{Q}^{T} = \underline{F}^{+}\,\tilde{T}(\underline{E}^{+})(\underline{F}^{+})^{T}$$

معادلات متشکله در تئوری ترمومکانیکی

$$\operatorname{div}\underline{T} + \rho\underline{b} = \rho\underline{a} \;,\quad \underline{T} = \underline{T}^{T}$$

$$\rho\dot{e} = \rho r - \operatorname{div}\underline{q} + \underline{T}:\underline{D}$$

$$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \underline{T}:\underline{D} - \frac{1}{\theta}\,\underline{q}\cdot\underline{g} \geq 0$$

توابع موجود را در دسته‌ای می‌نویسیم (Colman & Toupin)

$$\{\underline{T}, \psi, \eta, \underline{q}\}$$

$$\{\underline{b}, r\}$$

$$\{\underline{\chi}, \theta\}$$

ترموالاستیسیته

با فرض روابط مقابل شروع می‌کنیم:

$$\underline{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{F}, \theta, \underline{g})$$

$$\psi = \hat{\psi}(\underline{F}, \theta, \underline{g})$$

$$\eta = \hat{\eta}(\underline{F}, \theta, \underline{g})$$

$$\underline{q} = \hat{\underline{q}}(\underline{F}, \theta, \underline{g})$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{F}}\cdot\dot{\underline{F}} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{g}}\cdot\dot{\underline{g}}$$

$$-\rho(\dot{\hat{\psi}} + \hat{\eta}\dot{\theta}) + \hat{\underline{T}}\cdot\underline{L} - \frac{1}{\theta}\,\hat{\underline{q}}\cdot\underline{g} \geq 0$$

$$-\rho\left(\hat{\eta} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} + \left(\hat{\underline{T}} - \rho\,\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{F}}\,\underline{F}^{T}\right)\cdot\underline{L} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\underline{g}}\cdot\dot{\underline{g}} - \frac{1}{\theta}\,\hat{\underline{q}}\cdot\underline{g} \geq 0$$

نامعادله فوق می‌بایست در مورد کلیه فرایندهای ترمومکانیکی صادق باشد. حال اگر فرایندی را در نظر بگیریم که $\dot{\underline{g}} = 0$ باشد، در اینصورت داریم

با توجه به دلخواه بودن $\underline{g}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}} \cdot \underline{g} \geq 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}} = 0, \quad \psi = \tilde{\psi}(\underline{F}, \theta) \quad (i)$$

ولذا نامساوی کلازیوس - دوهم بصورت زیر در می‌آید

$$-\rho\left(\hat{\eta} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} + \left(\hat{\underline{T}} - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \underline{F}} \underline{F}^T\right)\underline{L} - \frac{1}{\theta}\hat{\underline{q}} \cdot \underline{g} \geq 0$$

حال اگر در این نامساوی فرآیندهای ایزوترمال را در نظر بگیریم که

$$\text{if}: \dot{\theta} = 0 \qquad \left(\hat{\underline{T}} - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{F}^T\right)\underline{L} - 1/\theta\, \hat{\underline{q}} \cdot \underline{g} \geq 0$$

$$\therefore -\rho\left(\hat{\eta} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}\right)\dot{\theta} \geq 0 \qquad \therefore \hat{\eta} = \tilde{\eta}(\underline{F}, \theta) = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta} \quad (ii)$$

در نتیجه نامساوی کلازیوس - دوهم بصورت زیر در می‌آید.

$$\left(\hat{\underline{T}} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{F}^T\right)\underline{L} - \frac{1}{\theta}\hat{\underline{q}} \cdot \underline{g} \geq 0$$

$$\text{if}: \underline{L} = \underline{0} \Rightarrow -1/\theta\, \hat{\underline{q}} \cdot \underline{g} \geq 0 \Rightarrow \hat{\underline{q}} \cdot \underline{g} \leq 0 \quad (iii)$$

رابطه فوق در واقع بیان کلازیوس قانون دوم ترمودینامیک است به این معنا که حرارت از محیط گرم به محیط سرد وارد می‌شود.

$$\therefore \left(\hat{\underline{T}} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{F}^T\right) \cdot \underline{L} \geq 0$$

$$\left(\hat{T}^{ij} - \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial (x^i_{,A})} x^j_{,A}\right) L_{ij} \geq 0$$

با توجه به دلخواه بودن $\underline{L}$ نتیجه می‌گیریم

$$\hat{\underline{T}} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{F}^T \quad (iv)$$

حال اگر اصل عینیت تحت حرکت صلب را در نظر بگیریم

$$\psi^+ = \psi, \quad \tilde{\psi}(F^+, \theta^+) = \tilde{\psi}(F, \theta), \qquad \theta^+ = \theta$$

$$\tilde{\psi}(\underline{F}, \theta) = \tilde{\psi}(\underline{Q}\,\underline{F}, \theta) = \tilde{\psi}(\underline{Q}\,\underline{R}\,\underline{U}, \theta)$$

$$\text{if}: \underline{Q} = \underline{R}^T \longrightarrow \tilde{\psi}(\underline{F}, \theta) = \tilde{\psi}(\underline{U}, \theta)$$

$$\therefore \psi = \bar{\psi}(\underline{C}, \theta) \quad \text{or} \quad \bar{\psi}(\underline{E}, \theta)$$

در مختصات کارتزین داریم:

$$T_{ij} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial (x_{i,A})} x_{j,A}$$

$$T_{ij} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial (C_{MN})} \frac{\partial C_{MN}}{\partial x_{i,A}} x_{j,A}$$

از طرفی

$$C_{MN} = x_{j,M} x_{j,N} \Longrightarrow \frac{\partial C_{MN}}{\partial x_{i,A}} = \delta_{ij}\delta_{AM} x_{j,N} + x_{j,M}\delta_{ij}\delta_{AN}$$

$$\therefore \frac{\partial C_{MN}}{\partial x_{i,A}} = \delta_{AM} x_{i,N} + \delta_{AN} x_{i,M}$$

با جایگذاری

$$\therefore T_{ij} = \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial C_{MN}} (\delta_{AM} x_{i,N} + \delta_{AN} x_{i,M}) x_{j,A}$$

$$= \rho \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial C_{MN}} (x_{i,N} x_{j,M} + x_{i,M} x_{j,N})$$

$$= 2\rho\, x_{i,M} x_{j,N} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial C_{MN}}$$

$$\underline{T} = 2\rho \underline{F} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \underline{C}} \underline{F}^T$$

حال اگر تابعیت E را در نظر بگیریم

$$T = \rho F \frac{\partial \psi}{\partial E} F^T$$

$$\hat{q}(F,\theta,g)\cdot g \leqslant 0$$

$$q = \hat{q}(F,\theta,g) \longrightarrow q^* = \hat{q}(F^*,\theta^*,g^*)$$

$$R^* = R \ , \quad q^*\cdot n^* = R^* \ , \quad q\cdot n = R \ , \quad n^* = Qn$$

$$\therefore\ q^* = Qq$$

$$Q\cdot\hat{q}(F,\theta,g) = \hat{q}(QF,\theta,Qg)$$

$$g^* = \frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} = Qg$$

$$\hat{q}(F,\theta,g) = Q^T\hat{q}(QF,\theta,Qg) \quad \forall Q \ \text{s.t.}\ QQ^T = I$$

$$= Q^T\hat{q}(QRU,\theta,Qg)$$

$$Q = R^T$$ طبق استدلال قبل (انتخاب می‌کنیم)

$$\hat{q}(F,\theta,g) = R\,\hat{q}(U,\theta,R^Tg)$$

$$= FU^{-1}\hat{q}(U,\theta,U^{-T}F^Tg)$$

از طرفی:

$$F^Tg = g_0 = \frac{\partial\theta}{\partial X}$$

$$\hat{q}(F,\theta,g) = F\,\tilde{q}(C,\theta,F^Tg) = F\,\tilde{q}(C,\theta,g_0)$$

این فرم کانونی هم هست.

در غیاب گرادیان حرارت (گرادیان دما) $q = 0$ است یعنی

$$\hat{q}(F,\theta,0) = 0$$

چراکه اگر

$$\hat{q}(F,\theta,0) = \bar{q}(F,\theta)$$

$$\hat{q}(F,\theta,g) = \bar{q}(F,\theta) + \tilde{q}(F,\theta,g)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\tilde{q}(F,\theta,\alpha g) = 0$$ به این معنا که این رابطه تابع پیوسته‌ای از g است

حال اگر از نامساوی کلازیوس دوهم حرارتی استفاده کنیم داریم:

$$\hat{q}(F,\theta,g)\cdot g \leqslant 0$$

$$\bar{q}(F,\theta)\cdot g + \tilde{q}(F,\theta,g)\cdot g \leqslant 0$$

حال اگر g را به αg تبدیل کنیم و طرفین نامساوی را بر α تقسیم کنیم داریم

$$\bar{q}(F,\theta)\cdot g + \tilde{q}(F,\theta,\alpha g)\cdot g \leqslant 0$$

حال α را به سمت صفر میل می‌دهیم، نتیجه می‌گیریم

$$\bar{q}(F,\theta)\cdot g \leqslant 0$$

$$\Rightarrow\ \bar{q}(F,\theta) = 0$$

معادلات متشکله با توازن آنتروپی

$\rho \dot{\eta} = \rho (s+\gamma) - \mathrm{div}\, \underline{p}$

$\rho \dot{\varepsilon} = \rho r - \mathrm{div}\, \underline{q} + \underline{T} \cdot \underline{D}$

با تلفیق معادلات بالا داریم:

$-\rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + \underline{T} \cdot \underline{D} - \rho \theta \gamma - \underline{p} \cdot \underline{g} = 0 \quad (*)$

فرآیند ترمودینامیکی:

$\{\underline{T}, \psi, \eta, \underline{p}(\underline{q}), \gamma\} \quad , \quad \{\underline{b}, s\} \quad , \quad \{\underline{\chi}, \theta\}$

معادلهٔ متشکله برای میدانهای ۵ گانه اول برحسب میدان دوگانه آخر بیان می‌کنیم
از معادلهٔ (*) برای استخراج محدودیتهای معادلات متشکله استفاده می‌کنیم. همچنین
عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی، در اینصورت معادلات تنها شامل
توازن آنتروپی ابزاری برای تعیین $\underline{b}$ و s خواهند بود.

ترموالاستیسیته

$\psi = \hat{\psi}(\underline{C}, \theta) \qquad \underline{p} = \hat{\underline{p}}(\underline{C}, \theta, \underline{g})$

$\underline{T} = \hat{\underline{T}}(\underline{C}, \theta) \qquad \gamma = \hat{\gamma}(\underline{C}, \theta, \underline{g})$

$\eta = \hat{\eta}(\underline{C}, \theta)$

$\dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{C}} \cdot \dot{\underline{C}} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} \qquad \dot{\underline{C}} = 2 \underline{F}^T \underline{D} \underline{F}$

$\dot{\psi} = 2 \underline{F} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{C}} \underline{F}^T \cdot \underline{D} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \dot{\theta}$

$-\rho \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} + \hat{\eta}\right) \dot{\theta} + \left(\hat{\underline{T}} - 2\rho \underline{F} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{C}} \underline{F}^T\right) \cdot \underline{D} - \rho \theta \hat{\gamma} - \hat{\underline{p}} \cdot \underline{g} = 0$

$\hat{\eta} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \quad , \quad \hat{\underline{T}} = 2\rho \underline{F} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \underline{C}} \underline{F}^T \quad , \quad \rho \theta \hat{\gamma} + \hat{\underline{p}} \cdot \underline{g} = 0$

معادلهٔ توازن انرژی (قانون اول ترمودینامیک) در یک بازهٔ زمانی

$R_h + R_c = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} - Q(P) \quad , \quad Q(P) = \int_R \rho r\, dv - \int_{\partial R} h\, da$

حال در بازهٔ زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ داریم:

$W = \int_{t_1}^{t_2} (R_h + R_c)\, dt = \Delta K + \Delta U - \int_{t_1}^{t_2} Q(P)\, dt$

$H = \int_{t_1}^{t_2} Q(P)\, dt$

کار انجام شده در بازهٔ زمانی برابر است با تغییرات انرژی داخلی و انرژی جنبشی منهای
حرارت تولید شده

$W = \Delta K + \Delta U - H$

$\Delta K + \Delta U = \int \rho \left(\tfrac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v} + \varepsilon\right) dv \Big|_{t_1}^{t_2}$

حال به یک جسم الاستیک در ترموالاستیسیته می‌پردازیم

$Q(P) = \int_R \rho r\, dv - \int_{\partial R} h\, da = \int_R (\rho r - \mathrm{div}\, \underline{q})\, dv$

از رابطهٔ بالانس آنتروپی نتیجه می‌گیریم که

$\rho \theta \dot{\eta} = \rho r + \rho \theta \gamma - \theta\, \mathrm{div}\, \underline{p}$

در ترموالاستیسیته داریم:

$\rho \theta \gamma + \underline{p} \cdot \underline{g} = 0$

از دو رابطهٔ فوق داریم:

$\rho \theta \dot{\eta} = \rho r - \underline{p} \cdot \underline{g} - \theta\, \mathrm{div}\, \underline{p}$

$= \rho r - \mathrm{div}(\theta \underline{p}) = \rho r - \mathrm{div}\, \underline{q}$

از نتیجه بالا داریم:

$$Q(P) = \int_R \rho\theta\dot{\zeta}\, dv$$

$$W = \int_R \rho\left(\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v} + \varepsilon\right) dv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\theta\dot{\zeta}\, dv\, dt$$

$$W = \int_R \rho\left(\tfrac{1}{2}\underline{v}\cdot\underline{v} + \psi\right) dv \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\theta\zeta\, dv\, dt$$

موادی که انرژی اتلاف می‌کنند یا مواد اتلاف کننده

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\underline{F}, \theta, \upsilon) \quad \text{or} \quad \psi = \hat{\psi}(\underline{F}, \theta, \upsilon)$$

$$\upsilon = \{\dot{\underline{F}}, \dot{\theta}, \nabla\underline{F}, \dots\}$$

در تعریف بالا مجموعه υ یک مجموعه تهی است. به بیان دیگر اگر $\upsilon = 0$ باشد ماده غیر اتلاف کننده (الاستیک) است.

$$\varepsilon' \triangleq \hat{\varepsilon}(\underline{F}, \theta, 0), \dots$$

$$\rho\theta\dot{\zeta} = \rho r + \rho\theta\gamma - \theta\, \mathrm{div}\, \underline{p}$$

$$= (\rho r - \mathrm{div}\, \underline{q}) + \rho\theta\gamma + \mathrm{div}(\theta\underline{p}) - \theta\, \mathrm{div}\, \underline{p}$$

$$\therefore\ \rho r - \mathrm{div}\, \underline{q} = \rho\theta\dot{\zeta} - \rho\theta\gamma - \underline{p}\cdot\underline{g}$$

حال می‌توان رابطه بالانس انرژی را به صورت زیر نوشت

$$W = \Delta K + \Delta U + \bar{W} + W_2$$

به طوری که

$$\bar{W} = -\int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\theta\dot{\zeta}'\, dv\, dt$$

$$W_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_R \rho\omega^*\, dv\, dt$$

$$\rho\omega^* = -\rho\theta(\dot{\zeta} - \dot{\zeta}') + \rho\theta\gamma + \underline{p}\cdot\underline{g} \leq (\rho\theta\dot{\zeta}' + \mathrm{div}\, \underline{q} - \rho r)$$

$$-H = \bar{W} + W_2 \qquad \rho\omega^* \geq 0$$

حال برای گسترش موضوع به بررسی دقیق‌تر قانون دوم ترمودینامیک می‌پردازیم. نظریه‌دهندگان [illegible] را مطرح کرده‌اند که نامساوی کلازیوس-دوهم را نقض نمی‌کند ولی قانون دوم ترمودینامیک را نقض می‌کند.

قانون دوم ترمودینامیک

قانون دوم ترمودینامیک سه بیان متفاوت دارد

(A) بیان کلوین پلانک: فرآیندی که تنها نتیجه آن کسب حرارت از یک منبع دما ثابت و تبدیل آن به کار مکانیکی است فرآیندی غیرممکن است. (1651)

ماشینی که گرم شده و [illegible] تغییری کند Kelvin-Planck (1851)

(B) بیان دوم: فرآیندی که در آن کار مکانیکی توسط اصطکاک به حرارت تبدیل می‌شود به طور کامل قابل معکوس شدن نیست.

(C) بیان کلازیوس (Clausius): گرما به طور خودبخودی از منبع سرد (دما پایین) به منبع گرم (دما بالاتر) منتقل نمی‌شود. $(\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{g} \leq 0)$ (2)

برای جسمی که اتلاف کننده انرژی نیست $W_L = 0$ است و در این صورت

$$W = \Delta K + \Delta \mathcal{U} + \bar{W} \quad , \quad -H = \bar{W}$$

برای یک فرآیند و معکوس آن

$$\Delta K = \Delta \mathcal{U} = 0 \quad , \quad W = \bar{W} = -H$$

برای یک جسم اتلاف کننده فرض می‌کنیم

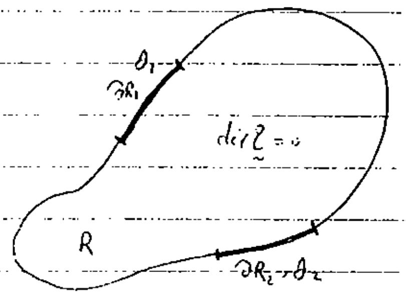
$(\rho \omega^2 \geq 0)$ (1)

$\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{g} \leq 0$

$\rho\dot{\varepsilon} - \rho r = \operatorname{div} \underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{D}$

برای حالت ماندگار در غیاب منبع حرارتی

$r = 0 \quad \dot{\varepsilon} = 0 \quad \underset{\sim}{D} = 0 \quad \operatorname{div} \underset{\sim}{q} = 0$



$\theta \big|_{\partial R_1} = \theta_1$

$\theta \big|_{\partial R_2} = \theta_2$

$\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n} \big|_{\partial R - \partial R_1 - \partial R_2} = 0$

$$\int_{\partial R_1} \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da + \int_{\partial R_2} \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da = 0 \quad , \quad \int_{\partial R_2} \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da > 0$$

$$(\theta_1 - \theta_2) \int_{\partial R_2} \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da = -\int_{\partial R_1} \theta_1 \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da - \int_{\partial R_2} \theta_2 \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da$$

$$= -\int_{\partial R} \theta \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da = -\int_R \operatorname{div}(\theta \underset{\sim}{q})\, dv$$

$$= -\int_R \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{g}\, dv$$

$$\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{g} \leq 0 \quad , \int_{\partial R_2} \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{n}\, da > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 \geq \theta_2$$

قیود داخلی   Internal Constraints

قیود کینماتیکی

$\Phi(\underline{F}) = 0$

بعنوان مثال برای تراکم ناپذیری یک قید حرکت است

$\det \underline{F} = 1$

با اعمال اصل عینیت قید حرکت مطلب الحاق داریم:

$\bar{\Phi}(\underline{C}) = 0$

$\dot{\bar{\Phi}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \underline{C}} \cdot \dot{\underline{C}} = 0 \Rightarrow 2\underline{F}^T \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \underline{C}} \underline{F} \cdot \underline{D} = 0$

$\tilde{\varphi} \triangleq 2\underline{F} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \underline{C}} \underline{F}^T \Rightarrow tr(\tilde{\varphi} \cdot \underline{D}) = 0$

$\tilde{\varphi}$ مستقل از $\underline{D}$ است. بعنوان مثال در مورد قید تراکم ناپذیری $\tilde{\varphi} = \underline{I}$

قید داخلی کلی تر ممکن است بصورت $\underline{\Gamma} \cdot \underline{D} = 0$ باشد که البته $\underline{\Gamma}$ مستقل از $\underline{D}$ است. (غیر هولونومیکی)

با وجود قید مکانیکی $\underline{\Gamma} \cdot \underline{D} = 0$ تنش به صورت $\underline{T} = \bar{\underline{T}} + \hat{\underline{T}}$ که برای $\hat{\underline{T}}$ معادلات مشخصه وجود دارد و $\bar{\underline{T}}$ مجهول است و طبق فرض در روند تحول کار انجام نمی دهد:

$\bar{\underline{T}} \cdot \underline{D} = 0 \qquad \bar{T}^{ij} D_{ij} = 0$

$\bar{T}$: Reaction Stress $\bar{\underline{T}} = \lambda \tilde{\varphi}$

در حالت جسم تراکم ناپذیر:

$\underline{T} = -p\,\underline{I} + \hat{\underline{T}}$

قید حرارتی

یک هادی صلب را که قانون هدایت مواد در مورد آن صادق باشد درنظر بگیرید و فرض کنید

$q_3 = -k_3\, \theta_{,3}$

$k_3 \longrightarrow \infty \qquad \theta_{,3} \longrightarrow 0 \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} = 0$

$f(x_1,x_2,x_3) = 0 \qquad \nabla f = \underline{n} \qquad \nabla\theta \cdot \underline{n} = 0$

$f_{,i}\, g_i = 0$ قید هولونومیکی

قید حرارتی کلی را می توان بصورت $\underline{\gamma} \cdot \underline{g} = 0$ که $\underline{\gamma}$ مستقل از $\underline{g}$ است.

با تلفیق قیود مکانیکی و حرارتی، قید ترمومکانیکی کلی را می توان بصورت زیر نوشت

$\underline{\Gamma} \cdot \underline{D} + \underline{\gamma} \cdot \underline{g} = 0 \qquad \Gamma^{ij} D_{ij} + \gamma^i g_i = 0$

بطوری که $\underline{\Gamma}$ مستقل از $\underline{D}$ و $\underline{\gamma}$ مستقل از $\underline{g}$ است. حال نقش قیود داخلی را بر روی معادلات مشخصه بررسی می کنیم

در ادامه با توجه به تغییر ترمودینامیکی با توجه به نامساوی کلازیوس داریم

$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}\ ,\quad \bar{\psi} = \mu \tilde{\psi}$

اگر هر یک تابع دلخواه مستقل از $\underline{D}$ و $\underline{g}$ باشند، در این صورت می‌توان نوشت:

$\eta = \bar{\eta} + \hat{\eta}\ ,\quad \bar{\eta} = \mu n$

$\underline{T} = \bar{\underline{T}} + \hat{\underline{T}}\ ,\quad \bar{\underline{T}} = \mu \underline{N}$

$\underline{q} = \bar{\underline{q}} + \hat{\underline{q}}\ ,\quad \bar{\underline{q}} = \mu \underline{n}$

حال نامساوی کلازیوس - دوهم را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \underline{T}:\underline{D} - \frac{1}{\theta}\underline{q}\cdot\underline{g} \geqslant 0$$

$$\dot{\psi} = \dot{\mu}N + \mu\dot{N} + \dot{\hat{\psi}}$$

$$-\rho\dot{\mu}N + \mu\left[-\rho\dot{N} - \rho n\dot{\theta} + \underline{N}\cdot\underline{D} - \frac{1}{\theta}\underline{n}\cdot\underline{g}\right] + \Lambda \geqslant 0$$

$$\Lambda = -\rho(\dot{\hat{\psi}} + \hat{\eta}\dot{\theta}) + \hat{\underline{T}}\,\underline{D} - \frac{1}{\theta}\hat{\underline{q}}\,\underline{g}$$

لذا از نامساوی فوق نتیجه می‌گیریم که $N = 0$ (μ دلخواه است) و همچنین چون $\dot{\mu}$ دلخواه است نتیجه می‌گیریم $n = 0$ در نهایت می‌توان نوشت:

$N = 0$

$n = 0$

$\underline{N}\cdot\underline{D} - \frac{1}{\theta}\underline{n}\cdot\underline{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\Gamma}:\underline{D} + \underline{\gamma}\cdot\underline{g} = 0 \\ \underline{N}\cdot\underline{D} - \frac{1}{\theta}\underline{n}\cdot\underline{g} = 0 \end{cases} \quad (*)$

$\Lambda \geqslant 0$

اگر فضای برداری $\{S_{ij}\ ,\ v_i\}$ با بعد ۹ را در نظر بگیریم ضرب داخلی را طبق رابطه زیر تعریف کنیم

$$S_{ij}^{(1)} S_{ij}^{(2)} + v_i^{(1)} v_i^{(2)}$$

حال بردارهای $\underline{A}$، $\underline{B}$ و $\underline{C}$ در این فضا را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که:

$\underline{B} \hat{=} (\underline{\Gamma}, \underline{\gamma})$ و $\underline{C} \hat{=} (\underline{D}, \underline{g})$ و $\underline{A} \hat{=} (\underline{N}, -\frac{1}{\theta}\underline{n})$

در این صورت روابط $(*)$ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{cases} \underline{A}\cdot\underline{C} = 0 & \forall\, \underline{C} \\ \underline{B}\cdot\underline{C} = 0 & \text{s.t.} \end{cases}$$

$\underline{A}$ و $\underline{B}$ مستقل از $\underline{C}$ هستند.

از روابط فوق نتیجه می‌گیریم $\underline{A} \parallel \underline{B}$ ، در غیر این صورت: $\underline{C} = \underline{A} - \frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{\underline{B}^2}\,\underline{B}$

$\underline{A} = \lambda \underline{B}$

اگر $\underline{A}$ موازی با $\underline{B}$ نباشد می‌توانیم مقدار مشخصی را برای $\underline{C}$ انتخاب کنیم

$$\underline{C} = \underline{A} - (\underline{A}\cdot\underline{B})\frac{\underline{B}}{\underline{B}^2}$$

$$\underline{A}\cdot\underline{C} = 0 \Rightarrow \underline{A}^2 - (\underline{A}\cdot\underline{B})^2/\underline{B}^2 = 0 \quad \therefore (\underline{A}\cdot\underline{B})^2 = \underline{A}^2\underline{B}^2$$

$$\Rightarrow \underline{C}^2 = \underline{A}^2 + \frac{(\underline{A}\cdot\underline{B})^2}{\underline{B}^2} - 2\frac{(\underline{A}\cdot\underline{B})^2}{\underline{B}^2} = \underline{A}^2 - \frac{(\underline{A}\cdot\underline{B})^2}{\underline{B}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{C} = \underline{0} \Rightarrow \underline{A} = (\underline{A}\cdot\underline{B})\,\underline{B}/\underline{B}^2 \Rightarrow \underline{A} \parallel \underline{B}$$

$$\Rightarrow \underline{N} = \lambda\underline{\Gamma}\ ,\quad \underline{n} = -\lambda\theta\underline{\gamma}$$

در نتیجه داریم:

$$\psi = \hat{\psi}\ ;\quad \eta = \hat{\eta}\ ;\quad \underline{T} = \lambda\underline{\Gamma} + \hat{\underline{T}}$$

$$\underline{q} = -\lambda\theta\underline{\gamma} + \hat{\underline{q}}$$

اگر معادلات زیر برای میدانهای ... گانه نوشته شود

$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi} \qquad \bar{\psi} = \mu m$

$\eta = \bar{\eta} + \hat{\eta} \qquad \bar{\eta} = \mu n$

$g = \bar{g} + \hat{g} \qquad \bar{g} = \mu l$

$\underline{T} = \bar{\underline{T}} + \hat{\underline{T}} \qquad \bar{T} = \mu \underline{N}$

$\underline{p} = \bar{\underline{p}} + \hat{\underline{p}} \qquad \bar{p} = \mu \underline{n}$

با جایگذاری در معادله (*) داریم:

$$-\rho\dot{\mu}\, m + \mu\left[-\rho(\dot{m} + n\dot{\theta}) + \underline{N}:\underline{D} - \underline{n}\cdot\underline{g} - \rho\theta l\right] + \Lambda = 0$$

$$\Lambda = -\rho(\dot{\hat{\psi}} + \hat{\eta}\dot{\theta}) + \hat{\underline{T}}:\underline{D} - \rho\theta\hat{g} - \hat{\underline{p}}\cdot\underline{g}$$

به ازای تمامی μ ، $\dot{\mu}$ برقرار است در نتیجه

$m = 0 \quad , \quad n = 0 \quad , \quad l = 0 \qquad \Lambda = 0$

$\underline{N}:\underline{D} - \underline{n}\cdot\underline{g} = 0$

با استدلال مشابه اصلی نتیجه می‌گیریم:

$\underline{N} = \lambda \underline{I}$

$\underline{n} = -\bar{\lambda}\, \underline{g}$

$\psi = \hat{\psi} \quad , \quad \eta = \hat{\eta} \quad , \quad g = \hat{g}$

$\underline{T} = \lambda \underline{I} + \hat{\underline{T}} \quad , \quad \underline{p} = -\bar{\lambda}\, \underline{g} + \hat{\underline{p}} \quad , \quad \lambda = \mu \bar{\lambda}$

تقارنهای مادی

Material Symmetry Properties (Restrictions)

اگر پاسخ ماده با تغییر در وضعیت مرجع تغییر نکند به منزلهٔ وجود تقارن در ساختار ماده می‌باشد

$\underline{X} \longmapsto \hat{\underline{X}} = \Gamma(\underline{X}) \qquad \underline{X} = \Gamma^{-1}(\hat{\underline{X}})$

$\underline{x} = \chi_R(\underline{X}) = \chi_{\hat{R}}(\hat{\underline{X}}, t) = \chi_{\hat{R}}(\Gamma(\underline{X}), t)$

$\underline{F} = \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad , \quad \hat{\underline{F}} = \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \hat{\underline{X}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{F} = \hat{\underline{F}}\cdot\underline{P}$

s.t. $\quad \underline{P}(\underline{X}) = \mathrm{Grad}\, \Gamma(\underline{X})$

همان حال، تنش کوشی را از رابطه زیر می‌گیریم

$\underline{T}(t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_R}[\underline{F}(\tau)]$ Simple Material

$\underline{T}(t) = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_{\hat{R}}}[\hat{\underline{F}}(\tau)]$

حال اگر رابطهٔ زیر برقرار باشد گوییم جسم از ویژگی تقارن مادی برخوردار است:

$\underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_R}[\underline{F}(t)] = \underset{\tau \le t}{\mathcal{F}_R}[\underline{F}\,\underline{P}^{-1}]$

اگر پاسخ توسط $\psi(\underline{F}, \theta)$ مشخص شده باشد، چنانچه:

$\psi(\underline{F}, \theta) = \psi(\underline{F}\,\underline{P}^{-1}, \theta)$

برقرار باشد، ویژگی تقارن مادی داریم. (ایزوالاستیک)

$g_R = \{ \underline{H} \ \ s.t. \ \ |\det \underline{H}| = 1 \}$

مجموعه g_R متشکل از تانسورهای یکان مدولی (Unimodular) تشکیل یک گروه می‌دهد

$\mathcal{L}: \ \underline{H}_1 , \underline{H}_2 \in g_R \Rightarrow \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \in g_R$

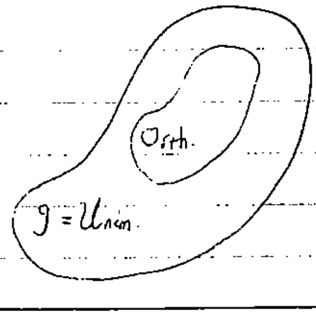
$\underline{I} \in g_R$

$\mathcal{L}: \ \underline{H} \in g_R \Rightarrow \underline{H}^{-1} \in g_R \ \ \& \ \ \underline{H} \cdot \underline{H}^{-1} = \underline{I}$

۱. تعریف: یک ماده ساده را سیال گوییم اگر نسبت به کل گروه تانسورهای یکان مدولی از ویژگی تقارن برخوردار باشد.

۲. تعریف: یک ماده ساده را جامد گوییم اگر هیئت مرجع R برای آن وجود داشته باشد که نسبت به زیرگروهی از گروه تانسورهای متعامد دارای ویژگی تقارن باشد. اگر $g_R \subset Orth$ کل گروه متعامد باشد ($g_R = Orth$) جامد را ایزوتروپیک گوییم در غیر اینصورت جامد را غیرایزوتروپیک گوییم.

زیرگروه تانسورهای متعامد از گروه تانسورهای یکان مدولی زیرگروهی ماکزیمال است. یعنی اگر $\underline{H}$ یک تانسور یکان مدولی باشد، $\underline{H} \notin Orth$ در اینصورت می‌توان با آن زیرگروه سره (Proper) از گروه تانسورهای یکان مدولی تشکیل داد.



$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ Transversely Isotropic

دارای صفحه تقارن

$Q = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , -\underline{I} \right\}$ دارای محور تقارن

هم فرم تبت مرکب مطلب

$\Psi(\underline{F}, \theta) = \Psi(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta) \qquad \underline{Q} \in g_R \subset O_{rth}$

$\hat{\underline{F}} = \underline{F}\underline{Q}^T$

$\Psi(\underline{C}, \theta) = \Psi(\underline{Q}\underline{C}\underline{Q}^T, \theta)$

$\hat{\underline{C}} = \hat{\underline{F}}^T \hat{\underline{F}} = \underline{Q}\underline{F}^T\underline{F}\underline{Q}^T = \underline{Q}\underline{C}\underline{Q}^T$

در مورد تانسور تنش کوشی داریم:

$\underline{T}(\underline{F}, \theta) = \underline{T}(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta)$

درخصوص تانسور تنش پیولا داریم

$\begin{cases} J\underline{T}(\underline{F}, \theta) = \underline{F} \, \underline{T}_o(\underline{F}, \theta) \\ \hat{J}\,\underline{T}(\hat{\underline{F}}, \theta) = \hat{\underline{F}} \, \underline{T}_o(\hat{\underline{F}}, \theta) \end{cases}$

$\hat{\underline{F}} = \underline{F}\underline{Q}^T \qquad \hat{J} = J \qquad \Rightarrow J\underline{T}(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta) = \underline{F}\underline{Q}^T \underline{T}_o(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta)$

چنانچه ویژگی تقارن داشته باشیم

$J\underline{T}(\underline{F}, \theta) = \underline{F}\underline{Q}^T \underline{T}_o(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta)$

$\underline{F}\underline{T}_o(\underline{F}, \theta) = \underline{F}\underline{Q}^T \underline{T}_o(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta)$

$\therefore \ \underline{T}_o(\underline{F}\underline{Q}^T, \theta) = \underline{Q}\,\underline{T}_o(\underline{F}, \theta)$

در مورد تنسور تنش پیولای تقارن داریم :

$\underline{T}_0^T = \underline{F}\,\underline{S}$

$T_0^T(\underline{F},\theta) = \underline{F}\,\underline{S}(\underline{F},\theta)$

$T_0^T(FQ^T,\theta) = FQ^T S(FQ^T,\theta)$

در صورت وجود ویژگی تقارن

$T_0^T(\underline{F},\theta)\,\underline{Q}^T = FQ^T S(FQ^T,\theta)$

$F S(F,\theta) Q^T = FQ^T S(FQ^T,\theta)$

در مورد ماکسول جزئی نیز به طور مشابه می توان ویژگی های تقارن را استنتاج کرد

جسم جامد ایزوتروپیک ترموالاستیک

$\psi = \psi(\underline{C},\theta)$

$\psi = \psi(QCQ^T,\theta) \quad \forall\ \underline{Q}\in O_{rth}$

$\Rightarrow \quad \psi = \hat{\psi}(I_1, I_2, I_3, \theta)$

$I_1 = tr\,\underline{C}\ ,\quad I_2 = \frac{1}{2}[(tr\,\underline{C})^2 - tr\,\underline{C}^2]\ ,\quad I_3 = \det \underline{C}$

$\underline{T} = 2\rho \underline{F}\dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{C}}\underline{F}^T$

$\dfrac{\partial \psi}{\partial \underline{C}} = \dfrac{\partial \psi}{\partial I_1}\dfrac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial I_2}\dfrac{\partial I_2}{\partial \underline{C}} + \dfrac{\partial \psi}{\partial I_3}\dfrac{\partial I_3}{\partial \underline{C}}$

$\dfrac{\partial I_1}{\partial \underline{C}} = \underline{I} \qquad \dfrac{\partial I_2}{\partial \underline{C}} = \underline{I}\,I_1 - \underline{C}\ ,\quad \dfrac{\partial I_3}{\partial \underline{C}} = I_3\,\underline{C}^{-1}$

$\underline{T} = 2\rho \underline{F}\left[\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_1}\underline{I} + \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2}(I_1\underline{I} - \underline{C}) + \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_3}(I_3\underline{C}^{-1})\right]\underline{F}^T$

$\underline{T} = 2\rho\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_3}\underline{I}\,I_3 + 2\rho\left(\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_1} + I_1\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2}\right)\underline{B} - 2\rho\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2}\underline{B}^2$

$\underline{T} = \alpha_0\underline{I} + \alpha_1\underline{B} + \alpha_2\underline{B}^2$

$\alpha_0 = 2\rho\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_3}I_3 = \alpha_0(I_1, I_2, I_3)$

$\alpha_1 = 2\rho\left(\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_1} + I_1\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2}\right) = \alpha_1(I_1, I_2, I_3)$

$\alpha_2 = -2\rho\dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2} = \alpha_2(I_1, I_2, I_3)$

از طرفی داریم

$B^3 - I_1B^2 + I_2B - I_3 = 0$

$\underline{B}^2 = I_1\underline{B} - I_2\underline{I} + I_3\underline{B}^{-1}$

با جایگذاری :

$\therefore\ \underline{T} = \beta_0\underline{I} + \beta_1\underline{B} + \beta_{-1}\underline{B}^{-1}$

اگر تنش های اصلی را $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ و کشش های اصلی را $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بنامیم داریم

$\sigma_1 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1^2 + \alpha_2\lambda_1^4 \qquad I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$

$\sigma_2 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2^2 + \alpha_2\lambda_2^4 \qquad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$

$\sigma_3 = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_3^2 + \alpha_2\lambda_3^4 \qquad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$

در صورت کلی

$\sigma_i = \hat{\sigma}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) \qquad i \neq j \neq k \neq i$

که مقدار مثبت به تنسورهای دوم مربوط است

$\psi = \hat{\psi}(I_1, I_2, I_3, \theta) = \bar{\psi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta)$

که نسبت به تنسور اول متقارن است

$\dfrac{\partial \bar{\psi}}{\partial \lambda_1} = \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_1}(2\lambda_1) + \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_2}(2\lambda_1)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \dfrac{\partial \hat{\psi}}{\partial I_3}(2\lambda_1)\lambda_2^2\lambda_3^2$

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + (\lambda_j^2 + \lambda_k^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} + \lambda_j^2 \lambda_k^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} \right]$$

$i \neq j \neq k \neq i$

$$\sigma_1 = 2\rho \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} I_3 + 2\rho \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \lambda_1^2 - 2\rho \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \lambda_1^4$$

$$\sigma_1 = 2\rho \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 + 2\rho \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] \lambda_1^2$$

$$- 2\rho \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \lambda_1^4$$

$$= 2\rho \lambda_1^2 \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right]$$

$$= \rho \lambda_1 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_1}$$

$$\therefore \quad \sigma_i = \rho \lambda_i \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i} \qquad i = 1, 2, 3$$

برای جامد ایزوتروپیک تراکم ناپذیر:

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \alpha_0 \underline{B} + \alpha_1 \underline{B}^2$$

$$= -p\underline{I} + \beta \underline{B} + \beta_1 \underline{B}^{-1}$$

تغییر شکلهای استاتیکی همگن

Homogeneous Static Deformation

$\underline{F}$: Constant $\longrightarrow \underline{x} = \underline{F}\,\underline{X}$

$x^i_{,AB} = 0 \quad , \quad \dot{\underline{F}} = 0$

با توجه به ثابت بودن تنش در غیاب نیروی جسم

$T^{ij}|_j = 0 \qquad T^{Ai}_{\ ,A} = 0$

۱) جسم تراکم ناپذیر (الاستیک ایزوتروپیک)

الف) کشش یکنواخت ساده Simple Tension

$T_{ij} = 0 \qquad i, j \neq 3$

$T_{33} = T$

$x_1 = aX_1 \ , \ x_2 = aX_2 \ , \ x_3 = bX_3$

$\lambda_1 = a \ , \ \lambda_2 = a \ , \ \lambda_3 = b$

$\sigma_i = \hat{\sigma}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) \qquad i \neq j \neq k \neq i$

$T_{11} = T_{22} = \sigma_1 = \sigma_2 = \hat{\sigma}(a, a, b) = 0 \longrightarrow a = f(b)$

$\sigma_3 = T_{33} = \hat{\sigma}(b, a, a) = T \longrightarrow T = g(b)$

توابع f و g تعیینی هستند برای نسبت پواسون و مدول یانگ. برای مقادیر کوچک تغییر شکل داریم:

$E = g'(1)$

$\nu = -f'(1)$

در نتیجه شکلهای فرنگ پاسخ در کشش و فشار یکسان نیست

$-g(b) \neq g\left(\frac{1}{b}\right)$

اگر تغییر فرمی [illegible] $a = b = 1$ بنابراین نتیجه داریم:

$$g(1) = 0 \qquad f(1) = 1$$

برای تغییر فرم کوچک داریم

$$e_{11} = e_{22} = a - 1$$

$$e_{33} = b - 1 \;\hat{=}\; T/E$$

$$E = \lim_{b \to 1} \frac{g(b)}{b-1} = g'(1)$$

$$e_{11} = a - 1 = f(b) - 1 = -\nu/E \; g(b)$$

$$\nu = -g'(1) \lim_{b \to 1} \frac{f(b)-1}{g(b)} = -f'(1)$$

ب) تغییر حجم یکنواخت　Uniform Dilatation

$$T_{ij} = -P\delta_{ij}$$

$$x_1 = \lambda X_1, \quad x_2 = \lambda X_2, \quad x_3 = \lambda X_3$$

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\lambda, \lambda, \lambda) = h(\lambda) \quad \to h'(\lambda) = 3 \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \lambda}$$

$$\sigma_i = \rho \lambda_i \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 2, 3$$

$$P = -1/3 \rho \lambda h'(\lambda) = k(\lambda) \quad , \; \rho \lambda^3 = \rho_0$$

$$\gamma = \tilde{\gamma}(\lambda, \lambda, \lambda) = \tilde{\gamma}(\rho) = h(\lambda)$$

$$\therefore h'(\lambda) = \frac{dh}{d\lambda} = \frac{d\tilde{\gamma}}{d\rho}(-3\rho/\lambda) \qquad \therefore P = \rho^2 \frac{d\tilde{\gamma}}{d\rho}$$

[illegible] مدول الاستیسیته حجمی Bulk Modulus و Elasticity عبارت است از

$$k = \frac{-P}{e_{ii}} = \frac{-P}{3(\lambda - 1)} = -\lim_{\lambda \to 1} \frac{k(\lambda)}{3(\lambda - 1)} = -1/3\, k'(1)$$

$$k(\lambda) = -1/3 \rho \lambda h'(\lambda) = -\frac{\rho_0}{3} h'(\lambda) \frac{1}{\lambda^2}$$

$$k'(\lambda) = -\frac{\rho_0}{3}\left(h''(\lambda) \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} h'(\lambda) \right)$$

$$\therefore K = \frac{1}{9} \rho_0 \left(h''(1) - 2h'(1) \right)$$

ج) برش ساده　Simple Shear

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + k X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underset{\sim}{B} = \begin{pmatrix} 1+k^2 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1+k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} I_1 = I_2 = 3 + k^2 \\ I_3 = 1 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{T} = \beta_0 \underset{\sim}{I} + \beta_1 \underset{\sim}{B} + \beta_{-1} \underset{\sim}{B}^{-1}$$

$$T_{11} = \beta_0 + (1 + k^2)\beta_1 + \beta_{-1} \qquad T_{23} = T_{32} = 0$$

$$T_{22} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_{-1}(1 + k^2) \qquad T_{13} = T_{31} = 0$$

$$T_{33} = \beta_0 + \beta_1 + \beta_{-1} \qquad T_{12} = T_{21} = k(\beta_1 - \beta_{-1})$$

$$T_{12} = T_{21} = \hat{\mu}(k^2)\, k$$

با توجه به اینکه β ها تابع k^2 هستند

$\hat{\mu}(k^2)$ مدول برشی تعمیم یافته است

$$\hat{\mu}(k^2) = \beta_1(3+k^2, 3+k^2, 1) - \beta_{-1}(3+k^2, 3+k^2, 1)$$

در تغییر شکل‌های کوچک $\hat{\mu}(0)$ همان مدول برشی است.

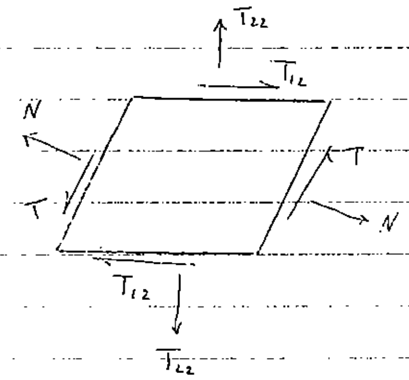
$$T_{11} - T_{22} = k\, T_{12}$$

رابطه فوق یک رابطه فراگیر است (Universal) و ارتباطی به معادلات مشخصه ندارد.

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = 1 + \dfrac{k^2}{2} + k\sqrt{1 + k^2/4} \\ \lambda_2^2 = 1 + k^2/2 - k\sqrt{1 + k^2/4} = 1/\lambda_1^2 \\ \lambda_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\sigma_i = \beta_0 + \beta_1 \lambda_i^2 + \beta_{-1}(1/\lambda_i^2)$$

$$\hat{\mu}(k^2) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$



$$(1+k^2)\,T = k(T_{11} - T_{22}) + (1-k^2)\,T_{12} = T_{12}$$

$$(1+k^2)\,N = T_{11} - 2k\,T_{12} + k^2\,T_{22}$$

(۲) جسم تراکم ناپذیر

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \beta_1 \underline{B} + \beta_{-1} \underline{B}^{-1}$$

$$\beta_1 = \hat{\beta}_1(I_1, I_2) \quad , \quad \beta_{-1} = \hat{\beta}_{-1}(I_1, I_2)$$

$$I_3 = 1$$

الف) کشش [illegible] ساده

$$T_{33} = T \quad , \quad T_{ij} = 0 \quad ij \neq 33$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_1 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} X_2 \quad , \quad x_3 = \lambda X_3$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda} & & \\ & 1/\sqrt{\lambda} & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \underline{B} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & & \\ & 1/\lambda & \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = 2/\lambda + \lambda^2 \quad , \quad I_2 = 2\lambda + 1/\lambda^2$$

$$T_{11} = -p + 1/\lambda\, \beta_1 + \lambda \beta_{-1}$$

$$T_{22} = -p + 1/\lambda\, \beta_1 + \lambda \beta_{-1}$$

$$T_{33} = -p + \lambda^2 \beta_1 + 1/\lambda^2\, \beta_{-1} = T$$

$$T_{12} = T_{23} = T_{13} = 0$$

$$T = (\lambda^2 - 1/\lambda)\,\hat{\beta}_1(2/\lambda + \lambda^2, 2\lambda + 1/\lambda^2) + (1/\lambda^2 - \lambda)\,\hat{\beta}_{-1}(2/\lambda + \lambda^2, 2\lambda + 1/\lambda^2) = g(\lambda)$$

$g(\lambda)$: Generalized Young Modulus of Elasticity

ب) تنش صفحه‌ای دو محوری Biaxial Plane Stress

$T_{11}=\sigma_1 \;,\; T_{22}=\sigma_2 \;,\; T_{ij}=0 \quad ij\neq 11,22$

$$x_1=\lambda_1 X_1,\quad x_2=\lambda_2 X_2,\quad x_3=\lambda_3 X_3 \Rightarrow \underline{B}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \lambda_2^2 & \\ & & \lambda_3^2\end{pmatrix},\quad \underline{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1/\lambda_1^2 & & \\ & 1/\lambda_2^2 & \\ & & 1/\lambda_3^2\end{pmatrix}$$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1 \rightarrow I_3=1$

$I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \;,\; I_2=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1^2\lambda_3^2+\lambda_2^2\lambda_3^2=\lambda_1^2\lambda_2^2+\dfrac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$

$T_{11}=\sigma_1=-p+\beta_1\lambda_1^2+\beta_{-1}\lambda_1^{-2}$

$$\begin{cases} T_{22}=\sigma_2=-p+\beta_1\lambda_2^2+\beta_{-1}\lambda_2^{-2}\\ T_{33}=0=-p+\beta_1\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}+\beta_{-1}\lambda_1^2\lambda_2^2\\ T_{12}=T_{13}=T_{23}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_1=\beta_1(\lambda_1^2-\lambda_3^2)+\beta_{-1}(\lambda_1^{-2}-\lambda_3^{-2})\\ \sigma_2=\beta_1(\lambda_2^2-\lambda_3^2)+\beta_{-1}(\lambda_2^{-2}-\lambda_3^{-2})\\ \beta_1=\hat\beta_1(I_1,I_1)\;,\;\beta_{-1}=\hat\beta_{-1}(I_1,I_2)\end{cases}$$

ج) برش ساده

$x_1=X_1+kX_2$

$x_2=X_2$

$x_3=X_3$

در این حالت تنش برشی ... T_{12} //

... ساده ...

تغییر شکل‌های استاتیکی غیرهمگن عمومی Universal Nonhomogeneous Static Deformations

... مواد تراکم‌ناپذیر ... (تئوری خطی)

معادلات ناویر کوشی در غیاب نیروی جسمی $\mu\nabla^2\underline{u}+(\lambda+\mu)\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})=0$

الف) مواد تراکم‌پذیر $T_{ij}=\lambda u_{m,m}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})$

$\underline{T}=\lambda\underline{I}\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}+\mu[(\underline{\nabla}\underline{u})+(\underline{\nabla}\underline{u})^T]$

$T_{ij,j}=0 \longrightarrow \lambda=\dfrac{2\mu\nu}{1-2\nu} \;,\; \lambda+\mu=\dfrac{\mu}{1-2\nu}$

$(1-2\nu)\nabla^2\underline{u}+\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})=0$

چنانچه $\nabla^2\underline{u}=0$ در نتیجه $\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})=0$. تغییر شکل ایجاد شده ... با ∇ ندارد (تغییر شکل تراکم‌پذیر خواهیم داشت ... بیضوی ...)

ب) مواد تراکم‌ناپذیر

$\underline{\nabla}\cdot\underline{u}=0$

$\underline{T}=-p\underline{I}+\mu[(\underline{\nabla}\underline{u})+(\underline{\nabla}\underline{u})^T]$

$T_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})$

$T_{ij,j}=0 \;:\; -\underline{\nabla}p+\mu\nabla^2\underline{u}=0$ معادله ناویر کوشی

$\nabla\times\nabla^2\underline{u}=0$ تابع تراکم‌ناپذیر برای $\underline{u}$ عبارت است از

تغییر فرم‌های همگن در مواد الاستیک ایزوتروپیک)

W : در این صورت تابع انرژی کرنشی بر واحد حجم

$W = W(\underset{\sim}{F}) = \bar{W}(I_1, I_2, I_3)$

انرژی کرنشی $U = \int_{R_0} W \, dV \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \int_{R_0} \dot{W} \, dV = \int_{R} \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} \, dv$

$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \int_{R_0} J \, \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} \, dV \qquad \dot{W} = J \, \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{D} = 2 \underset{\sim}{F} \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{F}^T : \underset{\sim}{D}$

$\Rightarrow J \underset{\sim}{T} = 2 \underset{\sim}{F} \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{F}^T \quad , \quad \underset{\sim}{T}_0 = 2 \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{F}^T = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{F}}$

$\Rightarrow T^{\circ}_{Ai} = \frac{\partial W}{\partial x_{i,A}} \quad , \quad \underset{\sim}{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{C}} = \frac{\partial W}{\partial \underset{\sim}{E}}$

(i) تغییر فرم‌های فراگیر در مواد تراکم‌پذیر

$T^{\circ}_{Ai,A} = 0$

قضیه: تنها تغییر فرم‌های فراگیر در مواد تراکم‌پذیر

$\left(\frac{\partial W}{\partial x_{i,A}} \right)_{,A} = 0$

تغییر فرم‌های همگن هستند (Ericksen)

در سال ۱۹۵۰ ، تعمیم Shield در سال 1970 در مجله J. Elastic.

$W = a I_1 + b I_1^2$

$I_1 = tr \underset{\sim}{C} = C_{MM} = x_{j,M} \, x_{j,M}$

$T^{\circ}_{Ai} = \frac{\partial W}{\partial x_{i,A}} = (a + 2b I_1) \frac{\partial I_1}{\partial x_{i,A}}$

$\frac{\partial I_1}{\partial x_{i,A}} = 2 x_{i,A}$

$T^{\circ}_{Ai,A} = 2 (a + 2b I_1) x_{i,AA} + 2b I_{1,A} \, x_{i,A}$

$\mathcal{Y}: x_{i,AA} = 0 \quad \Rightarrow I_{1,A} = 0$

$I_1 = x_{i,A} \, x_{i,A}$

$1/2 \, I_{1,B} = x_{i,AB} \, x_{i,A}$

$1/2 \, I_{1,BB} = x_{i,ABB} \, x_{i,A} + x_{i,AB} \, x_{i,AB} = 0$

یعنی تغییر فرم بایستی همگن باشد.

(ii) تغییر فرم‌های فراگیر در مواد تراکم‌ناپذیر

$J = 1 \quad , \quad I_3 = 1$

$T_{ij} = -P \delta_{ij} + 2 x_{i,A} \, x_{j,B} \frac{\partial W}{\partial C_{AB}}$

$T^{\circ}_{Ai} = -P X_{A,i} + \frac{\partial W}{\partial x_{i,A}} \qquad T^{\circ}_{Ai,A} = 0$

$-P_{,i} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_{i,A}} \right)_{,A} = 0 \qquad$ Ericksen Problem

Ericksen Problem

مسئله: آیا دسته‌ای از میدان‌های تغییر شکل $F(x_{iA})$ را بیابید که برای هر تابع چگالی انرژی کرنش ایزوتروپیک و همگن $W = W(x_{iA}) = \bar{W}(I_1, I_2)$ میدان‌های تنش وجود داشته باشد که در رابطه زیر صدق کند.

$$-P_{,i} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_{i,A}}\right)_{,A} = 0$$

Family 1

Bending, Stretching, Shearing and Torsion of a Rectangular Block

$$r^2 = 2AX$$
$$\theta = cY + DZ$$
$$z = EY + FZ$$

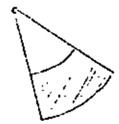
A, ..., F ثابت‌اند — برای ثابت ماندن حجم: $A(CF - DE) = 1$

Family 2

Straightening, Stretching and Shearing of an Angular Wedge.

$$x = \tfrac{1}{2}AR^2$$
$$y = c\Theta + DZ$$
$$z = E\Theta + FZ$$

A, ..., F ثابت‌اند — برای ثابت ماندن حجم: $A(CF - DE) = 1$



Family 3

Extension, Inflation, bending, torsion and shearing of an Annular wedge. (also eversion).

$$r^2 = AR^2 + B$$
$$\theta = c\Theta + DZ$$
$$z = E\Theta + FZ$$

A, ..., F ثابت‌اند — برای ثابت ماندن حجم: $A(CF - DE) = 1$

$A < 0 \rightarrow F < 0$

Family 4

Inflation (Spherical) or Eversion

$$r^3 = \pm R^3 + B$$
$$\theta = \Theta$$
$$\varphi = \Phi$$

Family 5

Extension, bending and Azimuthal shearing of an Annular wedge.

$$r = AR$$
$$\theta = B\ln R + c\Theta$$
$$z = FZ$$

$A^2 C F = 1$

$$F_{\langle iA \rangle} = \sqrt{\frac{g_{ii}}{G_{AA}}}\, x^i_{,A}$$

$$B_{\langle ij \rangle} = F_{\langle iA \rangle} F_{\langle jA \rangle}$$

مثال ۱: پیچش خالص استوانه مدور (حالت خاص از حالت ۳)

$r = R \quad , \quad \theta = \Theta + DZ \quad , \quad z = Z$

$$\underset{\sim}{F}_{\langle iA\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Dr \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+D^2r^2 & Dr \\ 0 & Dr & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -Dr \\ 0 & -Dr & 1+D^2r^2 \end{pmatrix}$$

$I_1 = I_2 = 3 + D^2r^2 \quad , \quad I_3 =$

$T_{rr} = -p + \beta_1 + \beta_{-1}$

$T_{\theta\theta} = -p + (1+D^2r^2)\beta_1 + \beta_{-1}$

$T_{zz} = -p + \beta_1 + (1+D^2r^2)\beta_{-1}$

$T_{\theta z} = Dr(\beta_1 - \beta_{-1})$

$T_{zr} = T_{r\theta} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} T_{\theta r,\theta} + T_{zr,z} + \dfrac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \\ T_{r\theta,r} + \frac{1}{r} T_{\theta\theta,\theta} + T_{z\theta,z} + \frac{2}{r} T_{r\theta} = 0 \\ T_{rz,r} + \dfrac{1}{r} T_{\theta z,\theta} + T_{zz,z} + \frac{1}{r} T_{rz} = 0 \end{cases}$$

$T_{rr}(r=a) = 0$

$$T_{rr} = D^2\int_a^r \beta_1 r\,dr = -D^2\int_r^a \beta_1 r\,dr$$

$T_{\theta\theta} = T_{rr} + D^2r^2\beta_1$

$T_{zz} = T_{rr} + D^2r^2\beta_{-1}$

با توجه به اینکه β_1 ، β_{-1} توابع I_1 ، I_2 هستند می‌توان نوشت:

$T_{\theta z} = \hat{\mu}(D^2r^2)\, Dr$

از روابط فوق نیز بدست می‌آید

$T_{\theta\theta} - T_{zz} = Dr\, T_{\theta z}$

ممان پیچشی M برای ایجاد پیچش در استوانه:

$$M = 2\pi\int_0^a r^2 T_{\theta z}\,dr = 2\pi D\int_0^a r^3 \hat{\mu}(D^2r^2)\,dr$$

و برای نیروی محوری T:

$$T = 2\pi\int_0^a T_{zz}\, r\,dr = 2\pi\int_0^a (T_{rr} + D^2r^2\beta_{-1})\, r\,dr$$

از طرفی داریم:

$$\int_0^a r\,T_{rr}\,dr = \frac{1}{2} r^2 \underbrace{T_{rr}}_{0}\Big|_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{dT_{rr}}{dr} r^2\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a (T_{rr} - T_{\theta\theta})\, r\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^a D^2 r^3 \beta_1\,dr$$

$$\therefore\ T = -\pi D^2\int_0^a (\beta_1 - 2\beta_{-1})\, r^3\,dr$$

با فرض آنکه $\beta_1 > 0$ ، $\beta_{-1} \leq 0$ نتیجه می‌شود که $T < 0$.

برای جلوگیری از افزایش طول استوانه در اثر پیچش بایستی یک فشار به دو سر استوانه وارد شود. این نتیجه که به اثر Poynting معروف است.

مثال ۲: خانواده ۵ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} r = AR \\ \theta = B\ln R + C\Theta \\ z = FZ \quad , \quad A^2CF = 1 \end{cases} \qquad \underset{\sim}{F}_{\langle iA\rangle} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ AB & AC & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} A^2 & A^2B & 0 \\ A^2B & A^2(B^2+C^2) & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} , \quad \underset{\sim}{B}^{-1}_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} (B^2+C^2)F/C & -\frac{BF}{C} & 0 \\ -BF/C & F/C & 0 \\ 0 & 0 & 1/F^2 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = A^2(B^2+C^2+1) + F^2$$
$$I_2 = A^2F^2(B^2+C^2+1) + A^4C^2 = F/C\,(B^2+C^2+1) + 1/F^2$$
$$I_3 = 1$$
$$T_{rr} = -p + \beta_1 A^2 + \beta_{-1}(B^2+C^2)\,F/C$$
$$T_{\theta\theta} = -p + \beta_1 A^2(B^2+C^2) + \beta_{-1} F/C$$
$$T_{zz} = -p + \beta_1 F^2 + \beta_{-1}/F^2$$
$$T_{\theta z} = T_{rz} = 0$$
$$T_{r\theta} = \left(\frac{\beta_1}{F} - \beta_{-1}F\right)\frac{B}{C}$$

چون هم $T_{rr} - T_{\theta\theta}$ و هم $T_{r\theta}$ مقادیر ثابتی هستند معادلات تعادل را به راحتی می‌توان انتگرال‌گیری کرد:

$$p = p_0 + (T_{rr} - T_{\theta\theta})\ln r + 2\theta\, T_{r\theta}$$

p_0 مقدار ثابتی است.

مثال ۳: حالت خاصی از خانواده ۳، کشش و پیچش استوانه مدور جامد.

$$r = \frac{R}{\sqrt{F}} , \quad \theta = \Theta + DZ , \quad z = FZ$$

$$\underset{\sim}{F}_{\langle iA\rangle} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{F} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{F} & Dr \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{B}_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} 1/F & 0 & 0 \\ 0 & 1/F + D^2r^2 & FDr \\ 0 & FDr & F^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^{-1}_{\langle ij\rangle} = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F^2 & -FDr \\ 0 & -FDr & 1/F + D^2r^2 \end{pmatrix}\frac{1}{F}$$

$$I_1 = 2/F + F^2 + D^2r^2$$
$$I_2 = 2F + (1/F + D^2r^2)/F \qquad I_2 I_3 = tr\, \underset{\sim}{B}^{-1}$$
$$I_3 = 1$$

$$\begin{cases} T_{rr} = -p + \frac{\beta_1}{F} + \beta_{-1}F \\ T_{\theta\theta} = -p + \beta_1(1/F + r^2) + \beta_{-1}F \\ T_{zz} = -p + \beta_1 F^2 + \beta_{-1}(1/F + D^2r^2)/F \\ T_{\theta z} = (\beta_1 F - \beta_{-1})Dr , \quad T_{r\theta} = T_{rz} = 0 \end{cases}$$

$$p = p(r) , \quad \frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0$$

اگر شعاع ابتدایی استوانه برابر R_e و شعاع نهایی آن برابر $r_e = R_e/\sqrt{F}$ در سطح جانبی آن عاری از کشش باشد داریم:

$$T_{rr} = \int_r^{r_2} \frac{1}{r}\,(T_{rr} - T_{\theta\theta})\,dr = -D^2 \int_r^{r_2} \beta_1 r\,dr$$

گشتاور پیچشی $M = \dfrac{2\pi D}{F}\displaystyle\int_0^{R_2} (\beta_1 - \beta_{-1}/F)\, R^3\, dR$

T (نیروی محوری) $T = 2\pi\,(F - 1/F^2)\displaystyle\int_0^{R_2} (\beta_1 - \beta_{-1}/F)\, R\, dR$

$$- \frac{\pi D^2}{F^2}\int_0^{R_2} \left(\beta_1 - \frac{2\beta_{-1}}{F}\right) R^3\, dR$$

$$\beta_{10} \triangleq \beta_1\left(\frac{2}{F} + F^2,\ 2F + \frac{1}{F^2}\right) = \beta_{10}(F)$$

$$\beta_{-10} \triangleq \beta_{-1}\left(\frac{2}{F} + F^2,\ 2F + 1/F^2\right) = \beta_{-10}(F)$$

$$\lim_{D\to 0} \frac{M}{D/F} = \frac{\pi R_2^4}{2}\,(\beta_{10} - \beta_{-10}/F) \triangleq \tau(F)$$

$\tau(F)$ مدول پیچشی یک اتساع معین است.

$$\lim_{D\to 0} T = \pi R_2^2 (F - 1/F^2)\,(\beta_{10} - \beta_{-10}/F) \triangleq T_0$$

$$\frac{R_2^2\, T_0}{\tau(F)} = 2\left(F - \frac{1}{F^2}\right)$$

تابع صعودی برحسب F

رابطهٔ فوق بدین معناست که با کشیدن یک استوانه پیچاندن آن مشکل می‌شود.

سؤال: یافتن اتساعی که به ازاء آن برای یک پیچش مشخص برآیند نیروی محوری برابر صفر باشد.

$$2\pi\,(F - 1/F^2)\int_0^{R_2} (\beta_1 - \beta_{-1}/F)\, R\, dR = \frac{\pi D^2}{F^2}\int_0^{R_2} (\beta_1 - 2\beta_{-1}/F)\, R^3\, dR$$

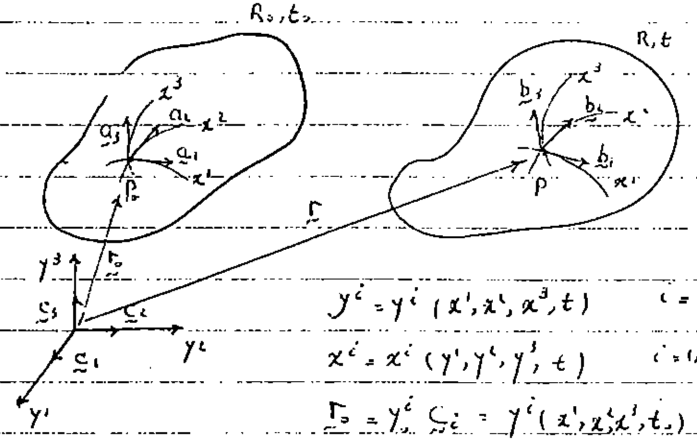
درمورد زوایای کوچک داریم: اگر رابطهٔ فوق را برای $D/F \to 0$ ، $F \to 1$ حل کنیم

$$\lim_{D\to 0} \frac{F-1}{(D/F)^2} = \frac{1}{12} R_2^2\, \frac{\beta_{10}(1) - 2\beta_{-10}(1)}{\beta_{10}(1) - \beta_{-10}(1)} = \frac{1}{12} R_2^2\left(1 - \frac{\beta_{-10}(1)}{\mu}\right)$$

که μ مدول برشی برای تغییر شکل کوچک است.

مختصات با توجه به هم رفت ... هم رفت Convected Coordinate
هم رو Concomitant Coordinate

برای سینماتیک محیط پیوسته از ... سیستم "Convective"



$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t) \qquad i = 1,2,3$

$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t) \qquad i = 1,2,3$

$\underline{r}_0 = y_0^i \varsigma_i = y^i(x^1, x^2, x^3, t_0)\, \varsigma_i$

$\underline{r} = y^i \varsigma_i = y^i(x^1, x^2, x^3, t)\, \varsigma_i$

بردارهای پایه هم‌وردا عبارتند از

$\underline{a}_i = \dfrac{\partial \underline{r}_0}{\partial x^i} \quad , \quad \underline{b}_i = \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial x^i}$

و نیز تانسور متریک نیز

$g_{ij} = \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j \quad , \quad h_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$

$g_{ij} = g_{ij}(\underline{x}, t) \quad , \quad h_{ij} = g_{ij}(\underline{x}, t_0)$

حال اگر نقطه‌ای P را در همسایگی نقطه P در نظر بگیریم، داریم:

$d\underline{r}_0 = \underline{a}_i dx^i$
$d\underline{r} = \underline{b}_i dx^i \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_i = \dfrac{\partial y_0^j}{\partial x^i} \varsigma_j \quad , \quad \underline{b}_i = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^i} \varsigma_j$

همانطور که مشاهده می‌شود بردارهای پایه در طی تبدیل هم‌وردا تبدیل می‌شوند.

$ds_0^2 = d\underline{r}_0 \cdot d\underline{r}_0 = h_{ij}\, dx^i dx^j$

$ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r} = g_{ij}\, dx^i dx^j$

$ds^2 - ds_0^2 = (g_{ij} - h_{ij})\, dx^i dx^j = 2\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$

$\varepsilon_{ij} \triangleq 1/2\,(g_{ij} - h_{ij}) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ Strain Tensor

ε_{ij} تانسور کرنش یک تانسور هم‌وردای مرتبه دوم متقارن، هم نسبت به پیکربندی اولیه در هیئت قبلی و هم نسبت به پیکربندی در هیئت فعلی.

$\underline{E} = \varepsilon_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$ Green Strain Tensor

$\underline{e} = \varepsilon_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j$ Almansi Strain Tensor

دو نوع تعریف متفاوت در خصوص تعریف پادوردا تانسور کرنش وجود دارد

$\varepsilon^i{}_j = g^{ik} \varepsilon_{kj} \quad , \quad \varepsilon_0{}^i{}_j = h^{ik} \varepsilon_{kj}$

حال به بررسی تانسور گرادیان تغییر شکل می‌پردازیم ($\underline{F}$). $\underline{F}$ یک نگاشت خطی است که $d\underline{r}_0$ را به $d\underline{r}$ بدل می‌کند.

$\underline{F} : d\underline{r}_0 \longrightarrow d\underline{r} \quad$ or $\quad \underline{F} : \underline{a}_i \longrightarrow \underline{b}_i$

با اندکی دقت درمی‌یابیم که $\underline{F}$ عبارتست از

$\underline{F} = \underline{b}_j \otimes \underline{a}^j$

$\underline{F} \cdot \underline{a}_i = (\underline{b}_j \otimes \underline{a}^j)\, \underline{a}_i = \underline{b}_j\, \delta^j_i = \underline{b}_i$

$\underline{F} = \delta^j_i\, \underline{b}_j \otimes \underline{a}^i$

و به همین ترتیب در مورد $\underline{F}^{-1}$ داریم:

$\underline{F}^{-1} : \underline{b}_i \longrightarrow \underline{a}_i$

$\underline{F}^{-1} = \underline{a}_j \otimes \underline{b}^i\, \delta^j_i \qquad \underline{F} = \underline{b}_j \otimes \underline{a}^j$

$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{b}_i = \underline{a}_i \qquad \underline{F}^{-1} = \underline{a}^j \otimes \underline{b}_j$

$\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^{-1}$ تانسورهای در وضعیت فعلی است در حالی که $\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{F}$ تانسورهای در وضعیت مرجع است.

$$FF^{-1} = (\underline{b}_j \underline{a}^j)\cdot(\underline{a}_i \underline{b}^i) = \underline{b}_j \otimes \underline{b}^j = g_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j$$

$$F^{-1}F = (\underline{a}_i \otimes \underline{b}^i)\cdot(\underline{b}_j \otimes \underline{a}^j) = \underline{a}_j \otimes \underline{a}^j = h_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$$

$$\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^{-1} \neq \underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{F}$$

$$\underset{\sim}{C} = F^T \underset{\sim}{F} = (\underline{a}^j \otimes \underline{b}_j)\cdot(\underline{b}_i \otimes \underline{a}^i) = g_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$$

رابطه فوق بیان میکند که اگر تانسور متریک $\underset{\sim}{g}$ به دستگاه مختصات مرجع منتقل شود، همان تانسور $\underset{\sim}{C}$ است.

$$\underset{\sim}{C}^{-1} = \underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{F}^{-T} = (\underline{a}_j \otimes \underline{b}^j)\cdot(\underline{b}^i \otimes \underline{a}_i) = g^{ij}\, \underline{a}_i \otimes \underline{a}_j$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^T = (\underline{b}_i \otimes \underline{a}^i)\cdot(\underline{a}^j \otimes \underline{b}_j) = h^{ij}\, \underline{b}_i \otimes \underline{b}_j$$

$$\underset{\sim}{B}^{-1} = \underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{F}^{-1} = (\underline{b}^i \otimes \underline{a}_i)\cdot(\underline{a}^j \otimes \underline{b}_j) = h_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j$$

$$\underset{\sim}{E} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{I}) = \tfrac{1}{2}(g_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j - h_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j)$$

$$\underset{\sim}{E} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$$

$$\underset{\sim}{e} = \tfrac{1}{2}(\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{B}^{-1}) = \tfrac{1}{2}(g_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j - h_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j)$$

$$\underset{\sim}{e} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j$$

تعریف نیز علاوه بر تانسور کرنش که قرار داده شد اویلری و لاگرانژی تعریف شد که مطابق با همین عملگرها می‌توان آن را تغییر داد.

تعبیر مؤلفه‌های فیزیکی کرنش:

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$$

$$= \underline{b}_i \cdot \underline{b}_j - \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j$$

$$= |\underline{b}_i||\underline{b}_j| \cos\theta_{ij} - |\underline{a}_i||\underline{a}_j| \cos\theta^{\circ}_{ij}$$

$$e = \text{Extension or Elongation} \triangleq \frac{|d\underline{r}| - |d\underline{r}_0|}{|d\underline{r}_0|}$$

$$|d\underline{r}| = (1+e)\,(d\underline{r}_0)$$

$$\Rightarrow |\underline{b}_i| = (1+e_i)\,|\underline{a}_i| \qquad i = 1,2,3$$

$$2\varepsilon_{ij} = \boxed{(1+e_i)(1+e_j)\cos\theta_{ij} - \cos\theta^{\circ}_{ij}}\; |\underline{a}_i|\cdot|\underline{a}_j|$$

$$\text{if } i=j \Rightarrow \theta^{\circ}_{ij} = \theta_{ij} = 0$$

$$2\varepsilon_{ii} = \left[(1+e_i)^2 - 1\right] h_{ii} \rightarrow (1+e_i)^2 = 1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}$$

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1$$

که مؤلفه‌های قطری تانسور کرنش معرف Extension هستند. اگر مختصات هرزی در وضعیت مرجع دکارتی باشد داریم

$$h_{ii} = 1, \quad h_{ij} = 0$$

در این صورت

$$\theta^{\circ}_{ij} = \pi/2, \quad \theta_{ij} = \pi/2 - \beta_{ij}$$

که β_{ij} زاویه برش است.

$$2\varepsilon_{ij} = (1+e_i)(1+e_j)\sin\beta_{ij}$$

لذا تغییر زاویه بین دو امتداد عبارتست از:

$$\Rightarrow \sin\beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1+2\varepsilon_{jj}}}$$

حال اگر Extension را نسبت به حالت نهایی بسنجیم داریم:

$$e = \frac{|d\underline{r}| - |d\underline{r}_0|}{|d\underline{r}|} = \frac{ds - ds_0}{ds}$$

$$|d\underline{r}_0| = (1-e)\,|d\underline{r}| \quad , \quad |\underline{g}_i| = (1-e_i)\,|\underline{b}_i|$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon_{ij} = |\underline{b}_i||\underline{b}_j|\left(\cos\theta_{ij} - (1-e_i)(1-e_j)\cos\theta^{\circ}_{ij}\right)$$

اگر $i=j \Rightarrow 2\varepsilon_{ii} = g_{ii}\left[1-(1-e_i)^2\right]$

$$1-(1-e_i)^2 = \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}} \Rightarrow (1-e_i)^2 = 1-\frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}$$

$$e_i = 1-\sqrt{\frac{g_{ii}-2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

حال چنانچه مختصات متعامد در حالت نهایی داشته باشیم داریم:

$$g_{ii} = 1 \quad , \quad g_{ij} = 0 \ (\neq)$$

$$|\underline{b}_i| * |\underline{b}_j| = 1$$

$$\theta_{ij} = \pi/2 \ , \ \theta^{\circ}_{ij} - \beta_{ij} = \pi/2$$

$$\therefore \sin\beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1-2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1-2\varepsilon_{jj}}}$$

کرنشهای اصلی

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij}\,dx^i dx^j$$

با تعریف کرنش امتدادی:

$$\frac{ds^2-ds_0^2}{2ds^2} = \varepsilon_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \varepsilon_{ij}m^i m^j$$

$$m^i = \frac{dx^i}{ds} \quad , \quad g_{ij}m^i m^j = 1$$

$$\begin{cases} Q(\underline{m}) \triangleq \varepsilon_{ij}m^i m^j \\ g_{ij}m^i m^j - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q(\underline{m}) \\ \varphi(\underline{m}) = 0 \end{cases}$$

منظور از محاسبه کرنش اصلی، اکسترمم کردن $Q(\underline{m})$ به همراه قید $\varphi(\underline{m}) = 0$ است که منجر به معادله زیر می‌شود

$$(\varepsilon_{ij} - \lambda g_{ij})\,m^j = 0 \qquad \varepsilon^i_j = g^{im}\varepsilon_{mj}$$

$$|\varepsilon^i_j - \lambda\delta^i_j| = 0 \qquad -\lambda^3 + \theta_1\lambda^2 - \theta_2\lambda + \theta_3 = 0$$

$$\theta_1 = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$\theta_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$$

$$\theta_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

بردارهای اصلی $m^i_{(1)}$ ، $m^i_{(2)}$ ، $m^i_{(3)}$ که دو به دو عمود بر هم هستند. اگر محورهای اصلی همان محورهای دستگاه مختصات ۱ ۲ ۳ انتخاب شوند داریم:

$$Q = \varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_3^2$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

لذا محورهای اصلی کرنش محورهایی هستند که در طی تغییر شکل، همچنان بر هم عمود می‌مانند.

$$\theta_1 = \varepsilon^i_i = \varepsilon^1_1 + \varepsilon^2_2 + \varepsilon^3_3 = tr\,\underset{\sim}{e}$$

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon^1_1 & \varepsilon^1_2 \\ \varepsilon^2_1 & \varepsilon^2_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon^1_1 & \varepsilon^1_3 \\ \varepsilon^3_1 & \varepsilon^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon^2_2 & \varepsilon^2_3 \\ \varepsilon^3_2 & \varepsilon^3_3 \end{vmatrix}$$

$$\theta_2 = \tfrac{1}{2}\left[(tr\,\underset{\sim}{e})^2 - tr\,\underset{\sim}{e}^2\right]$$

$$\theta_3 = \det \underset{\sim}{e} = \begin{vmatrix} \varepsilon^1_1 & \varepsilon^1_2 & \varepsilon^1_3 \\ \varepsilon^2_1 & \varepsilon^2_2 & \varepsilon^2_3 \\ \varepsilon^3_1 & \varepsilon^3_2 & \varepsilon^3_3 \end{vmatrix}$$

چنانچه تنسور کرنش لاگرانژی را در دست داشته باشیم داریم:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$$

$$\frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} = \varepsilon_{ij} \frac{dx^i}{ds_0} \frac{dx^j}{ds_0}$$

$m_0^i = \frac{dx^i}{ds_0}$ بردار یکه در جهت ds_0 است $\frac{dx^i}{ds_0}$

$$\Rightarrow \frac{ds^2 - ds_0^2}{ds_0^2} = \varepsilon_{ij}\, m_0^i m_0^j$$

$$\begin{cases} Q(m_0) = \varepsilon_{ij}\, m_0^i m_0^j \\ \varphi(m_0) = h_{ij}\, m_0^i m_0^j - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\varepsilon_{ij} - \lambda h_{ij})\, m_0^j = 0$$

$$|\varepsilon^i_j - \lambda \delta^i_j| = 0 \quad ; \quad \varepsilon^i_j = h^{im} \varepsilon_{mj}$$

$$-\lambda^3 + \theta_{01}\lambda^2 - \theta_{02}\lambda + \theta_{03} = 0$$

$$\theta_{01} = \varepsilon^0_1 + \varepsilon^0_2 + \varepsilon^0_3$$

$$\theta_{02} = \varepsilon^0_1 \varepsilon^0_2 + \varepsilon^0_1 \varepsilon^0_3 + \varepsilon^0_2 \varepsilon^0_3$$

$$\theta_{03} = \varepsilon^0_1 \varepsilon^0_2 \varepsilon^0_3$$

کرنش‌های اصلی $m^0_{(1)}, m^0_{(2)}, m^0_{(3)}$ هستند که دو به دو بر هم عمودند و چنانچه دستگاه مختصات Y_0 در راستای جهات اصلی انتخاب شود داریم:

$$Q(y_0) = \varepsilon^0_1 {y^0_1}^2 + \varepsilon^0_2 {y^0_2}^2 + \varepsilon^0_3 {y^0_3}^2$$

$$e^0 = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad , \quad e = \frac{ds - ds_0}{ds}$$

$$e^0_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1 \quad , \quad e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

$$e^0_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon^0_i} - 1 = \frac{ds^i}{ds_0^i} - 1$$

$$e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i} = 1 - \frac{ds_0^i}{ds^i}$$

$$\Rightarrow e^0_i + 1 = \frac{1}{1 - e_i} \quad \Rightarrow e^0 = \frac{ds^i}{ds_0^i} - 1$$

$$\sqrt{1 + 2\varepsilon^0_i} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_i}} \quad \Rightarrow e^0_i$$

$$\Rightarrow \varepsilon^0_i = \frac{\varepsilon_i}{1 + 2\varepsilon_i} \qquad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon^0_i}{1 + 2\varepsilon^0}$$

$$\theta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1^0}{1+2\varepsilon_1^0} + \frac{\varepsilon_2^0}{1+2\varepsilon_2^0} + \frac{\varepsilon_3^0}{1+2\varepsilon_3^0}$$

$$= \frac{\varepsilon_1^0(1-2\varepsilon_2^0)(1-2\varepsilon_3^0) + \varepsilon_2^0(1+2\varepsilon_1^0)(1-2\varepsilon_3^0) + \varepsilon_3^0(1+2\varepsilon_1^0)(1+2\varepsilon_2^0)}{(1+2\varepsilon_1^0)(1+2\varepsilon_2^0)-(1+2\varepsilon_2^0)}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_1^0 + 4\theta_2^0 + 12\theta_3}{1+4\theta_2^0+8\theta_3^0}$$

المان حجم

$dv_0 = \sqrt{h}\, dx^1 dx^2 dx^3$, $h = \det(h_{ij})$

$dv = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3$, $g = \det(g_{ij})$

$$dv_0 / dv = \sqrt{h/g}$$

$\underset{\sim}{H} \triangleq h_{ij}\, \underline{b}^i \otimes \underline{b}^j$ $\qquad h^i_{\cdot j} \triangleq g^{ik} h_{kj}$

$$dv_0 / dv = \sqrt{|h^i_{\cdot j}|}$$

$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} \rightarrow 2\varepsilon^i_{\cdot j} = \delta^i_j - h^i_{\cdot j}$

$$\frac{dv_0}{dv} = \sqrt{|\delta^i_j - \varepsilon^i_{\cdot j}|}$$

$|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j| = -8\,|\varepsilon^i_j - \tfrac{1}{2}\delta^i_j|$.

$-8\left[-\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\theta_1 - \tfrac{1}{2}\theta_2 + \theta_3\right] = 1 - 2\theta_1 + 4\theta_2 - 8\theta_3$

$$dv_0 / dv = (1 - 2\theta_1 + 4\theta_2 - 8\theta_3)^{1/2}$$

$G \triangleq g_{ij}\, \underline{a}^i \otimes \underline{a}^j$ $\qquad g^i_{\cdot j} = g_{kj} h^{ik}$

$\det(g^i_{\cdot j}) = g/h$ $\qquad 2\varepsilon^i_{\cdot j} = g^i_{\cdot j} - \delta^i_j$

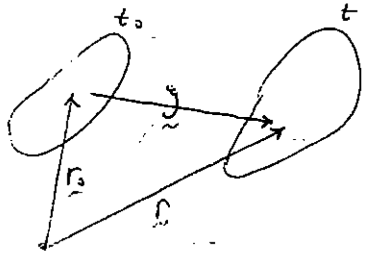
$$\frac{dv}{dv_0} = \sqrt{\det(g^i_{\cdot j})}$$

$\det(\delta^i_j + 2\varepsilon^i_{0j}) = \frac{1}{8}(8)^2 \det(\varepsilon^i_{0j} + \tfrac{1}{2}\delta^M_M)$

$|\varepsilon^i_{0j} - \lambda\delta^i_j| = -\lambda^3 + \theta_1^0 \lambda^2 - \theta_2^0 \lambda + \theta_3^0$

$|\varepsilon^i_{0j} + \tfrac{1}{2}\delta^i_j| = 1/8 + \theta_1^0 \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\theta_2^0 + \theta_3^0$

$$dv/dv_0 = \sqrt{1 + 2\theta_1^0 + 4\theta_2^0 + 8\theta_3^0}$$



$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{r} - \underset{\sim}{r}_0$$

$$\underset{\sim}{y} = u^i \underset{\sim}{a}_i = w^i \underset{\sim}{b}_i$$

$$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}_0 + \underset{\sim}{y}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial \underset{\sim}{r}_0}{\partial x^j} + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j} \Rightarrow \underset{\sim}{b}_j = \underset{\sim}{a}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j}$$

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{b}_j - \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j$$

$$2\varepsilon_{ij} = \left(\underset{\sim}{a}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j}\right)\left(\underset{\sim}{a}_i + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i}\right) - \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{a}_j$$

$$2\varepsilon_{ij} = \underset{\sim}{a}_i \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j} + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i} \underset{\sim}{a}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i} \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j} = u_{i|j} \underset{\sim}{a}^i = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \left\{ {k \atop ij} \right\}_h u_k \right\} \underset{\sim}{a}^i$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j} = w_{i|j} \underset{\sim}{b}^i$$

$$w_{i|j} = \frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \left\{ {k \atop ij} \right\}_g w_k$$

$$2\varepsilon_{ij} = \underset{\sim}{a}_i \cdot u_{m|j} \underset{\sim}{a}^m + u_{m|i} \underset{\sim}{a}^m \cdot \underset{\sim}{a}_j + (u_{m|i} \underset{\sim}{a}^m)(u_{k|j} \underset{\sim}{a}^k)$$

$$= u_{i|j} + u_{j|i} + u^k{}_{|i} u_{k|j} = 2\varepsilon_{ij}$$

کرنش گرین :

$$\underset{\sim}{y} = u_i \underset{\sim}{a}^i = w_i \underset{\sim}{b}^i$$

$$2\varepsilon_{ij} = \underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{b}_j - \left(\underset{\sim}{b}_i - \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i}\right)\left(\underset{\sim}{b}_j - \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j}\right)$$

$$= \underset{\sim}{b}_i \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j} + \underset{\sim}{b}_j \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i} - \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^i} \frac{\partial \underset{\sim}{y}}{\partial x^j}$$

$$= w_{i|j} + w_{j|i} - w^k{}_{|i} w_{k|j}$$

کرنش المانسی : $\left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(w_{i|j} + w_{j|i} - w^k{}_{|i} w_{k|j}\right)\right)$

معادلات همسازی

ε_{ij} که از یکدیگر استقلال ندارند

$$ds_0^2 = h_{ij} \, dx^i dx^j$$

$$ds^2 = g_{ij} \, dx^i dx^j$$

$$R^{(h)}_{ijkl} = R^{(g)}_{ijkl} = 0$$

اگر فضا هموار در هر حالت باشد، دکارتی انتخاب کرد $g_{ij} = \delta_{ij}$,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$$

$$h_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$$

تنسور h_{ij} تابع مؤلفه‌های کرنش است. لذا با قرار دادن آن در رابطه (۱)
معادلات همسازی برحسب مؤلفه‌های کرنش بدست می‌آید. و بطور عکس
اگر $h_{ij} = \delta_{ij}$

برای کرنش خطی معادلات سازگاری بصورت زیر در می‌آیند

$$\varepsilon_{ij|kl} + \varepsilon_{kl|ij} - \varepsilon_{ik|jl} - \varepsilon_{jl|ik} = 0$$

$$\underset{\sim}{F} : \underset{\sim}{a}_i \longrightarrow \underset{\sim}{b}_i$$

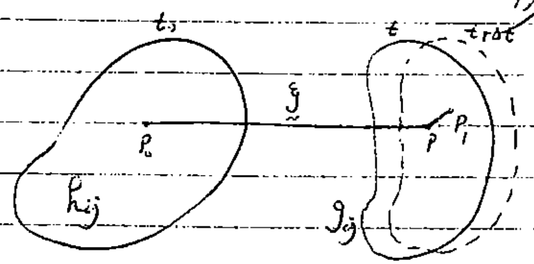
$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{b}_j \otimes \underset{\sim}{a}^j \quad , \quad \underset{\sim}{b}_i = \underset{\sim}{a}_i \frac{\partial \underset{\sim}{\xi}}{\partial x^i} \quad , \quad \underset{\sim}{\xi} = u^i \underset{\sim}{a}_i$$

$$\underset{\sim}{b}_j = \underset{\sim}{a}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{\xi}}{\partial x^j} = \underset{\sim}{a}_j + u^i|_j \underset{\sim}{a}_i$$

$$\underset{\sim}{F} = (\underset{\sim}{a}_j + u^i|_j \underset{\sim}{a}_i) \otimes \underset{\sim}{a}^j$$

$$= (\delta^i_j + u^i|_j) \underset{\sim}{a}_i \otimes \underset{\sim}{a}^j$$

تانسور نرخ کرنش یا تانسور نرخ تغییر فرم



$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij})$$

$$\underset{\sim}{\xi} = u_i \underset{\sim}{a}^i = w_i \underset{\sim}{b}^i$$

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i} + u^k|_i u_{k|j})$$

$$= \tfrac{1}{2}(w_{i|j} + w_{j|i} - w^k|_i w_{k|j})$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij})$$

بردار جابجایی $\underset{\sim}{\xi}$ از نقطه P (در زمان t) به P_1 (در زمان $t+\Delta t$) بردار جابجایی کوچکی است
و اگر سرعت ذره P برابر $\underset{\sim}{v}$ باشد

$$\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{v}\Delta t = u_i \underset{\sim}{b}^i = v_i \Delta t \, \underset{\sim}{b}^i$$

$$u_i = v_i \Delta t$$

$$\underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{b}^i$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}(v_{i|j} + v_{j|i}) = D_{ij}$$ تانسور نرخ کرنش

$$D_{ij} = D_{ji}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\frac{dg_{ij}}{dt}$$

[illegible] h_{ij} [illegible]

$$D_{ij} = \frac{d}{dt}\varepsilon_{ij}$$

حال اگر معادلات همسازی را برای تانسور کرنش بی‌نهایت کوچک $D_{ij}\Delta t$ بنویسیم و از ترم‌های بالای Δt صرف نظر کنیم داریم:

$$R_{ijkl} = 0$$

$$D_{ij,kl} + D_{kl,ij} - D_{ik,jl} - D_{il,jk} = 0$$

بررسی سرعت در همسایگی یک ذره

$P \xrightarrow{d\underline{r}} P'$

$$d\underline{r} = dx^i\,\underline{b}_i$$

$$d\underline{v} = v_{i|j}\,dx^j\,\underline{b}^i \qquad \underline{v} = v_i\,\underline{b}^i$$

$$d\underline{v} = \tfrac{1}{2}(v_{i|j}+v_{j|i})\,dx^j\,\underline{b}^i + \tfrac{1}{2}(v_{i|j}-v_{j|i})\,dx^j\,\underline{b}^i$$

$$= D_{ij}\,dx^j\,\underline{b}^i + W_{ij}\,dx^j\,\underline{b}^i$$

$$d\underline{v} = D_{ij}\,dx^j\,\underline{b}^i + \underline{\omega}\times d\underline{r} \qquad 2\omega^i = -\varepsilon^{ijk}W_{jk}\ ,\ W_{jk} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega^i$$

$$\xi^i \triangleq dx^i\ ,\quad \Phi \triangleq \tfrac{1}{2}D_{ij}\,\xi^i\xi^j \Rightarrow \operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}\underline{b}^i$$

$$\therefore\ d\underline{v} = \operatorname{grad}\Phi + \underline{\omega}\times d\underline{r}$$

$$ds \triangleq |d\underline{r}|$$

$$\frac{1}{ds}\frac{d}{dt}(ds) = \frac{1}{2(ds)^2}\frac{d}{dt}(ds)^2 = \frac{1}{2(ds)^2}\frac{d}{dt}(d\underline{r}\cdot d\underline{r})$$

$$= \frac{1}{(ds)^2}\,d\underline{v}\cdot d\underline{r} = \frac{1}{(ds)^2}\,D_{ij}\,dx^j\,\underline{b}^i \cdot dx^k\,\underline{b}_k$$

$$= \frac{1}{(ds)^2}\,D_{ij}\,dx^i\,dx^j = D_{ij}\,m^i m^j$$

لذا $\operatorname{grad}\Phi$ مربوط به نرخ تغییر طول $d\underline{r}$، $\underline{\omega}\times d\underline{r}$ مربوط به نرخ چرخش $d\underline{r}$ است.

تغییرات زمانی بردارهای پایه

$$\underline{F} = \underline{b}_i\otimes\underline{a}^i\ ,\quad \underline{F}^{-1} = \underline{a}_i\otimes\underline{b}^i$$

$$\underline{F}\cdot\underline{a}_i = \underline{b}_i\ ;\quad \underline{F}^{-1}\cdot\underline{b}_i = \underline{a}_i$$

$$\underline{F}^T = \underline{a}^i\otimes\underline{b}_i\ ,\quad \underline{F}^{-T} = \underline{b}^i\otimes\underline{a}_i$$

$$\underline{F}^T\underline{b}^i = \underline{a}^i\ ,\quad \underline{F}^{-T}\underline{a}^i = \underline{b}^i$$

با فرض ثابت بودن بردارهای پایه $\underline{a}_i$ در این صورت

$$\begin{cases} \dot{\underline{b}}_i = \dot{\underline{F}}\cdot\underline{a}_i = \underline{L}\,\underline{b}_i = \underline{L}\,\underline{F}\,\underline{a}_i \\ \dot{\underline{b}}^i = \dot{\underline{F}}^{-T}\underline{a}^i = -\underline{L}^T\underline{F}^{-T}\underline{a}^i = -\underline{L}^T\underline{b}^i \end{cases}$$

مشتق زمانی تانسور متریک عبارت است

$$g_{ij} = \underline{b}_i\cdot\underline{b}_j$$

$$\dot{g}_{ij} = \dot{b}_i \cdot b_j + b_i \cdot \dot{b}_j = L b_i \cdot b_j + b_i \cdot L b_j$$

$$= b_i \cdot L^T b_j + b_i \cdot L b_j = b_i \cdot (L + L^T) b_j$$

$$= 2 b_i \cdot D b_j = 2 D_{ij}$$

$\therefore \; D_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}$, $D = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij} \, b^i \otimes b^j$

با مشابه اخیر را با روابط پایه برای g^{ij} نیز داریم

$$\dot{g}^{ij} = \dot{b}^i \cdot b^j + b^i \cdot \dot{b}^j$$

$$= -(L^T b^i \cdot b^j + b^i \cdot L^T b^j)$$

$$= -(b^i \cdot L b^j + b^i \cdot L^T b^j)$$

$$= -b^i \cdot (L + L^T) b^j = -2 b^i \cdot D b^j$$

$$= -2 D^{ij}$$

$\therefore \; D_{ij} = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}$, $D^{ij} = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ij}$

تعریف: اگر $T = T(x,t)$ بیان فضایی تانسور T باشد، نتیجتاً $\overset{\triangle}{T}$ ، $\overset{\nabla}{T}$ که طبق روابط زیر تعریف شده اند به ترتیب مشتق همرفت الدروید و پادوردای الدروید تانسور T خوانده می شوند

$$\overset{\triangle}{T} = \dot{T} + L^T T + T L$$

$$\overset{\nabla}{T} = \dot{T} - L T - T L^T$$

که L تانسور گرادیان سرعت است. حال با توجه به تعریف اخیر به توضیحات زیر توجه داریم:

توضیح: مشتق همرفت الدروید کرنش المانسی تانسور نرخ کرنش است:

$$\overset{\triangle}{e} = D$$

$$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) = \frac{1}{2}(I - F^{-T} F^{-1})$$

از طرفی داریم:

$$\dot{e} = \frac{1}{2}(L^T F^{-T} F^{-1} + F^{-T} F^{-1} L)$$

$$= \frac{1}{2}(L^T B^{-1} + B^{-1} L)$$

در نتیجه داریم:

$$\overset{\triangle}{e} = \frac{1}{2}(L^T B^{-1} + B^{-1} L) + \frac{1}{2} L^T (I - B^{-1}) +$$

$$\frac{1}{2}(I - B^{-1}) L = \frac{1}{2}(L + L^T)$$

$$= D$$

توضیح: اگر تانسور فضایی $T = T(x,t)$ در دستگاه مختصات عمومی بیان شود، یعنی:

$$T = T_{ij} \, b^i \otimes b^j = T^{ij} \, b_i \otimes b_j$$

در این صورت $\overset{\triangle}{T}$ و $\overset{\nabla}{T}$ برابر خواهند بود با:

$$\overset{\triangle}{T} = \dot{T}_{ij} \, b^i b^j$$

$$\overset{\nabla}{T} = \dot{T}^{ij} \, b_i b_j$$

$$\overset{\triangle}{T} = \dot T_{ij}\, b^i b^j + T_{ij}\, \dot b^i b^j + T_{ij}\, b^i \dot b^j +$$

$$+ L^T T_{ij}\, b^i b^j + (T_{ij}\, b^i b^j) L$$

$$= \dot T_{ij}\, b^i \otimes b^j - T_{ij}\, L^T b^i \otimes b^j$$

$$- T_{ij}\, b^i \otimes L^T b^j + T_{ij}\, L^T b^i \otimes b^j$$

$$+ (T_{ij}\, b^i \otimes b^j) L$$

از طرفی داریم:

$$L = L_{mn}\, b^m b^n$$

$$L^T = L_{nm}\, b^m \otimes b^n = L^n{}_m\, b^m \otimes b_n$$

$$L^T b^j = L^n{}_m\, b^m \delta^j_n = L^j{}_m\, b^m = L^{jm}\, b_m$$

داریم:

$$T^{ij}\, b_i \otimes b_j$$

$$T_{ij}\, b^i \otimes b^j = T_{ij}\, b^i \otimes L^{jm}\, b_m$$

$$+ T_{ij}\, b^i \otimes b^j) L = T_{ij}\, b^i \otimes b^j L^{mn}\, b_m b_n$$

$$= T_{ij}\, b^i \otimes b_n L^{jn} = T_{ij}\, b^i \otimes L^{jm}\, b_m$$

$$\dot T = \dot T^{ij}\, b_i \otimes b_j + T^{ij}\, \dot b_i \otimes b_j + T^{ij}\, b^i \otimes \dot b^j$$

$$= \dot T^{ij}\, b_i \otimes b_j + (T^{ij}\, L b_i \otimes b_j) +$$

$$+ T^{ij}\, b_i \otimes L b_j$$

$$\overset{\nabla}{T} = \dot T - L T - T L^T = \dot T^{ij}\, b_i \otimes b_j$$

Objective Derivatives of Objective Tensors.

T یک تانسور مرتبه دوم آبجکتیو است

$$T^+ = Q T Q^T$$

$\dot T$ مشتق مادی یک تانسور مرتبه دوم آبجکتیو نیست

$$\dot T^+ = \dot Q T Q^T + Q \dot T Q^T + Q T \dot Q^T$$

$$= Q \dot T Q^T + \Omega Q T Q^T - Q T Q^T \Omega$$

$$= Q \dot T Q^T + (W^+ - Q W Q^T)(Q T Q^T) - (Q T Q^T)(W^+ - Q W Q^T)$$

$$= Q \dot T Q^T + W^+ T^+ - Q W T Q^T - T^+ W^+ + Q T W Q^T$$

$$\dot T^+ - W^+ T^+ + T^+ W^+ = Q(\dot T - W T + T W) Q^T$$

بنابراین عبارت $\dot T - WT + TW$ آبجکتیو است

$\overset{\circ}{T} \triangleq \dot T - W T + T W$ = Zaremba-Jaumann Derivative

$\overset{\circ}{T}^+ = Q \overset{\circ}{T} Q^T$ مشتق زارمبا-یامن

SIMARA

توضیح: اگر $\overset{\circ}{T} = 0$ باشد در این صورت مقادیر اصلی تانسور T ثابت می‌باشند

$$\frac{d}{dt}\left[tr\, T^{k}\right] = k\, tr\left(\dot{T}\, T^{k-1}\right) \qquad \left(\frac{d}{dt} tr\, B = tr\, \dot{B}\right)$$

$$\mathcal{L}: \quad \overset{\circ}{T} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{T} = W T - T W$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[tr\, T^{k}\right] = k\, tr\left[(W T - T W)\, T^{k-1}\right] = 0$$

بنابراین $tr\, T^{k}$ برای مقادیر $k = 1, 2, \ldots$ ثابت می‌باشد در نتیجه ناورداهای اصلی T ثابت می‌باشد در نتیجه مقادیر اصلی T ثابت می‌باشد.

مشتق یاومن تنها مشتق ابژکتیو نیست، مشتقات همرفتی یا پادهمرفتی الدروید نیز ابژکتیوند

$$\overset{\triangle}{T} = \dot{T} + L^{T} T + T L \quad , \quad \overset{\nabla}{T} = \dot{T} - L T - T L^{T}$$

مشتق ابژکتیو دیگری که تعریف شده عبارت است از Green-Naghdi Derivative

$$\overset{\diamond}{T} = \dot{T} - \dot{R} R^{T} T + T \dot{R} R^{T} \qquad R = F U^{-1}$$

$$\overset{\triangle}{T} = \dot{T} + (D - W) T + T (D + W) = \overset{\circ}{T} + (D T + T D)$$

$$\overset{\nabla}{T} = \dot{T} - (D + W) T - T (D - W) = \overset{\circ}{T} - (D T + T D)$$

بطور کلی کمیت $\overset{\circ}{T} + \alpha(D T + T D)$ ابژکتیو است

$$F = R U \quad , \quad R = F U^{-1}$$

$$\dot{R} = \dot{F} U^{-1} + F \dot{U}^{-1} = L R + (-R \dot{U} U^{-1})$$

$$\dot{R} R^{T} = L - R \dot{U} U^{-1} R^{T}$$

از طرفی $\dot{R} R^{T}$ یک تانسور پادمتقارن است در نتیجه داریم:

$$= -L^{T} + R U^{-1} \dot{U} R^{T}$$

$$= W + \frac{1}{2}\left(R U^{-1} \dot{U} R^{T} - R \dot{U} U^{-1} R^{T}\right)$$

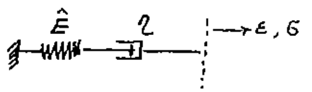
$$= W - \frac{1}{2} R \left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}\right) R^{T}$$

$$\overset{\diamond}{T} = \dot{T} - \left[W - \frac{1}{2} R\left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}\right) R^{T}\right] T$$

$$+ T \left[W - \frac{1}{2} R\left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}\right) R^{T}\right]$$

$$= \overset{\circ}{T} + \frac{1}{2} R\left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}\right) R^{T} T - \frac{1}{2} T R\left(\dot{U} U^{-1} - U^{-1} \dot{U}\right) R^{T}$$

"Maxwell Model"



$$\sigma = \hat{E}\varepsilon_1 = \eta(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1)$$

$$\dot{\sigma} = \hat{E}\dot{\varepsilon}_1$$

$$\dot{\sigma}/\hat{E} = \dot{\varepsilon} - \sigma/\eta \quad , \quad \sigma + \frac{\eta}{\hat{E}}\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$$

$$\sigma + \lambda\dot{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}$$

حال از معادلات ماکسول ایده گرفته و معادله تنسوری زیر را معرفی می‌کنیم

$$\underline{T} + \lambda \overset{\circ}{\underline{T}} = \eta \underline{D}$$

بررسی مسئله مدل ماکسول در برش

$$\underline{L} = \dot{\gamma}(t)\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y \qquad \underline{L} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\left[\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x\right]$$

$$\underline{W} = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}(t)\left[\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x\right]$$

$$\overset{\circ}{\underline{T}} = \dot{\underline{T}} - \underline{W}\,\underline{T} + \underline{T}\,\underline{W}$$

ماتریس تنش T یک تانسور انحرافی است (Deviatoric)

$$\underline{T} = \sigma(t)\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) + \tau(t)\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$\overset{\circ}{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma} & \dot{\tau} \\ \dot{\tau} & -\dot{\sigma} \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\sigma} - \dot{\gamma}\tau & \dot{\tau} + \dot{\gamma}\sigma \\ \dot{\tau} + \dot{\sigma}\gamma & \dot{\gamma}\tau - \dot{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \overset{\circ}{\underline{T}} = (\dot{\sigma} - \dot{\gamma}\sigma)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) +$$

$$(\dot{\tau} + \dot{\gamma}\sigma)(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$[\sigma + \lambda(\dot{\sigma} - \dot{\gamma}\tau)](\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y) +$$

$$[\tau + \lambda(\dot{\tau} + \dot{\gamma}\sigma)](\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$= \tfrac{1}{2}\eta\dot{\gamma}\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$\begin{cases} \sigma + \lambda(\dot{\sigma} - \dot{\gamma}(\tau)) = 0 & \sigma(0) = \tau(0) = 0 \\ \tau + \lambda(\dot{\tau} + \dot{\gamma}\sigma) = \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}\eta \end{cases}$$

فرض کنید $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = cte$ حال σ را بین دو معادله فوق حذف می‌کنیم

$$\tau(0) = 0$$

$$\dot{\tau}(0) = \tfrac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}_0\eta}{\lambda}$$

$$\lambda(\ddot{\tau} + \dot{\gamma}_0\dot{\sigma}) + \dot{\tau} = 0 \qquad \dot{\sigma} = \dot{\gamma}_0\tau - \sigma/\lambda$$

$$\lambda\ddot{\tau} + \dot{\gamma}_0(\lambda\dot{\gamma}_0\tau - \sigma) + \dot{\tau} = 0$$

$$\lambda\ddot{\tau} + \lambda\dot{\gamma}_0^2 + \dot{\tau} + \tau/\lambda - \dot{\gamma}_0\eta/2\lambda + \dot{\tau} = 0$$

$$\ddot{\tau} + \frac{2}{\lambda}\dot{\tau} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \dot{\gamma}_0^2\right)\tau = \frac{\dot{\gamma}_0 \eta}{2\lambda^2}$$

معادله زیرا سینی رسیده‌ایم که آن را به عنوان معادله دیفرانسیل ابتدائی زیر حل می‌کنیم

$$\tau(0) = 0 \ , \quad \dot{\tau}(0) = \frac{\dot{\gamma}_0 \eta}{2\lambda}$$

$$m^2 + \frac{2}{\lambda} m' + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \dot{\gamma}_0^2\right) m^0 = 0$$

$$m_{1,2} = -1/\lambda \pm i\,\dot{\gamma}_0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\dot{\gamma}_0 \eta}{2(1+\lambda^2\dot{\gamma}_0^2)} + e^{-t/\lambda}\left[A \cos \dot{\gamma}_0 t + B \sin \dot{\gamma}_0 t\right]$$

$$A = -\frac{\dot{\gamma}_0 \eta}{2(1+\lambda^2\dot{\gamma}_0^2)} \ , \quad B = \frac{\eta}{2\lambda} + \frac{\eta}{2(1+\lambda^2\dot{\gamma}_0^2)}$$

$$\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}_0 \eta}{2(1+\lambda^2\dot{\gamma}_0^2)}\left(1 - e^{-t/\lambda}\cos \dot{\gamma}_0 t\right) + \left(\frac{\eta}{2\lambda} + \frac{\eta}{2(1+\lambda^2\dot{\gamma}_0^2)}\right) e^{-t/\lambda} \sin \dot{\gamma}_0 t$$

رابطه فوق نشانگر این مطلب است که تنش در حال تغییر است ⟶ (Oscilate)

دلیل آن است که مشتق سازگار نیست و در نتیجه مشتق پایین در مدل ماکسول در نظر

گرفته شده مشتق ابژکتیو نیست.

$$\underline{\tau} + \lambda \dot{\underline{\tau}} = \eta \underline{D} \quad \Rightarrow \quad ?$$

$$\sigma + \lambda \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}$$

$$\dot{\sigma} + 1/\lambda\, \sigma = \eta/\lambda\, \dot{\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma(t)\, e^{t/\lambda}\right) = \frac{\eta}{\lambda}\dot{\varepsilon}(t)\, e^{t/\lambda}$$

$$\sigma(t)\, e^{t/\lambda} = \eta/\lambda \int_{-\infty}^{t} e^{\tau/\lambda}\varepsilon'(\tau)\, d\tau$$

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\lambda}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\varepsilon'(\tau)\, d\tau$$

اگر $\varepsilon(t) \equiv 0 \quad t < 0$

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\lambda}\int_{0}^{t} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\varepsilon'(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t R(t-\tau)\,\varepsilon'(\tau)\, d\tau$$

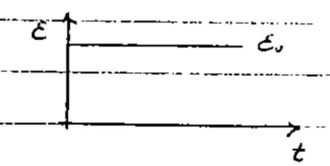
R(t) را اصطلاحاً Relaxation Function می‌نامند و برای مدل ماکسول R(t)

برابر است با:

$$R(t) = \frac{\eta}{\lambda}\exp(-t/\lambda)$$

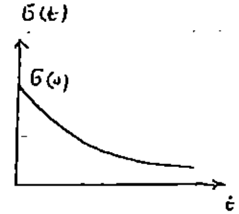
و مقدار λ را Relaxation Time گویند. حال اگر کرنش مقدار ثابتی

باشد



$$\sigma(t) = \frac{\eta \varepsilon_0}{\lambda} e^{-t/\lambda} \qquad \eta/\lambda = \hat{E}$$

$$\sigma(t) = \hat{E} \varepsilon_0 e^{-t/\lambda} = \sigma(0) e^{-t/\lambda}$$



برای مسئله برش ساده با در نظر گرفتن معادله مشتق شده زیر

$$\underline{T} + \lambda \hat{\underline{T}} = \eta \hat{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{T} + \lambda \hat{\underline{T}} = \eta \underline{D} \quad ; \quad \hat{\underline{T}} = \dot{\underline{T}} + \underline{L}^T \underline{T} + \underline{T}\,\underline{L}$$

در اینجا لازم نیست $\underline{T}$ افزایی باشد

$$\underline{L} = \dot{\gamma}(t)\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y$$

$$\underline{T} = \sigma_{xx}(t)\, \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \sigma_{yy}(t)\, \underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \tau(t)\,(\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau \\ \tau & \sigma_{yy} \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\tau} \\ \dot{\tau} & \dot{\sigma}_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau \\ \tau & \sigma_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau \\ \tau & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{\eta}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

در این مورد سه معادله دیفرانسیل برای شرایط ابتدایی

$$\sigma_{xx}(0) = \sigma_{yy}(0) = \tau(0) = 0$$

$$\sigma_{xx} + \lambda \dot{\sigma}_{xx} = 0$$

$$\tau + \lambda(\dot{\tau} + \dot{\gamma}\sigma_{xx}) = \eta/2\, \dot{\gamma}$$

$$\sigma_{yy} + \lambda(\dot{\sigma}_{yy} + 2\dot{\gamma}\tau) = 0$$

از معادله اول با توجه به شرایط ابتدایی :

$$\sigma_{xx}(t) \equiv 0$$

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = \eta/2\, \dot{\gamma}$$

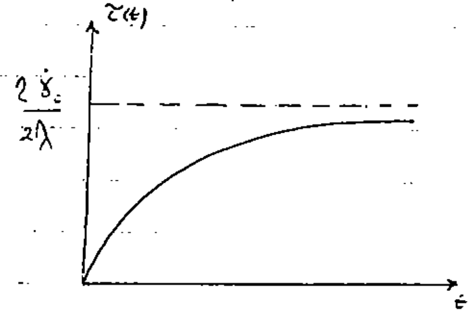
با ثابت فرض کردن $\dot{\gamma}$ داریم :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\tau(t) e^{t/\lambda}\right] = \frac{\eta \dot{\gamma}_0}{2\lambda} e^{t/\lambda}$$

$$\tau(t) = \frac{\eta \dot{\gamma}_0}{2\lambda} (1 - e^{-t/\lambda})$$

با جایگذاری $\tau(t)$ در معادله سوم σ_{yy} را بدست می آوریم



لذا مدل فوق می تواند تعمیمی از مدل ماکسول باشد

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F} \ , \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$$

$$\overset{\triangle}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{F}}^{T}\mathbf{T} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T}\,\overline{(\mathbf{F}^{T}\mathbf{T}\mathbf{F})}\,\mathbf{F}^{-1}$$

$$\lambda\,\dot{\overline{(\mathbf{F}^{T}\mathbf{T}\mathbf{F})}} + \mathbf{F}^{T}\mathbf{T}\mathbf{F} = \eta/_2\, \dot{\mathbf{C}}$$

حال می‌توان از طرفین رابطه فوق انتگرال گرفت

$$\frac{d}{dt}\left[(\mathbf{F}^{T}\mathbf{T}\mathbf{F})\,e^{t/\lambda}\right] = \frac{\eta}{2\lambda}\,\dot{\mathbf{C}}\,e^{t/\lambda}$$

$$\mathbf{F}^{T}(t)\,\mathbf{T}(t)\,\mathbf{F}(t)\,e^{t/\lambda} = \frac{\eta}{2\lambda}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau/\lambda}\,\mathbf{C}'(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{\eta}{2\lambda}\,e^{\tau/\lambda}\,\mathbf{C}(\tau)\Big|_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t}\frac{\eta}{2\lambda^2}\,e^{\tau/\lambda}\,\mathbf{C}(\tau)\,d\tau$$

$$e^{t/\lambda}\,\mathbf{C}(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau/\lambda}\,\mathbf{C}(t)\,d\tau$$

$$\mathbf{F}^{T}\mathbf{T}\mathbf{F} = -\frac{\eta}{2\lambda^2}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\left[\mathbf{C}(\tau) - \mathbf{C}(t)\right]d\tau$$

$$\therefore\ \mathbf{T}(t) = -\frac{\eta}{2\lambda^2}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\left[\mathbf{F}^{-T}(t)\,\mathbf{C}(\tau)\,\mathbf{F}^{-1}(t) - \mathbf{I}\right]d\tau$$

$$= \frac{-\eta}{2\lambda^2}\int_{0}^{\infty} e^{-s/\lambda}\,\mathbf{G}(t-s)\,ds$$

$$\mathbf{G}(t-s) \triangleq \mathbf{F}^{-T}(t)\,\mathbf{C}(t-s)\,\mathbf{F}^{-1}(t) - \mathbf{I}$$

یادآوری شود که

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)\,\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\,\mathbf{F}^{-1}(t)$$

$$\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^{T}(\tau)\,\mathbf{F}_t(\tau)$$

تانسور راست نسبی نیز برابر است:

$$= \mathbf{F}^{-T}(t)\,\mathbf{F}^{T}(\tau)\,\mathbf{F}(\tau)\,\mathbf{F}^{-1}(t)$$

$$= \mathbf{F}^{-T}(t)\,\mathbf{C}(\tau)\,\mathbf{F}^{-1}(t)$$

$$\therefore\ \mathbf{T}(t) = -\frac{\eta}{2\lambda^2}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\left[\mathbf{C}_t(\tau) - \mathbf{I}\right]d\tau$$

$$= \frac{-\eta}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right)\mathbf{E}_t(\tau)\,d\tau$$

Rivlin - Ericksen Tensors

$\underset{\sim}{C}_t(\tau)$ را حول $\tau = t$ بسط تیلور می‌دهیم

$$\underset{\sim}{C}_t(\tau) = \underset{\sim}{I} + \frac{1}{1!}\left.\frac{\partial \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=t}(\tau - t) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau^2}\right)_{\tau=t}(\tau-t)^2 +$$

$$\dots + \frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=t}(\tau-t)^n + \dots$$

حال تانسورهایی به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$\underset{\sim}{A}_1(t) = \left.\frac{\partial \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau}\right)_{\tau=t}$$

$$\underset{\sim}{A}_2(t) = \left.\frac{\partial^2 \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau^2}\right)_{\tau=t}$$

$\vdots$

$$\underset{\sim}{A}_n(t) = \left.\frac{\partial^n \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=t} \quad , \; \underset{\sim}{A}_0(t) = \underset{\sim}{I}$$

با توجه به اینکه $\underset{\sim}{C}_t(\tau)$ برابر است با:

$$\underset{\sim}{C}_t(\tau) = \underset{\sim}{F}^{-T}(t)\,\underset{\sim}{C}(\tau)\,\underset{\sim}{F}^{-1}(t)$$

$$\underset{\sim}{A}_n(t) = \underset{\sim}{F}^{-T}(t)\,\underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\,\underset{\sim}{F}^{-1}(t)$$

$$\underset{\sim}{A}_0 = \underset{\sim}{I}$$

$$\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{F}^{-T}(t)\,\dot{\underset{\sim}{C}}(t)\,\underset{\sim}{F}^{-1}(t) = 2\underset{\sim}{F}^{-T}\underset{\sim}{F}^{T}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{F}^{-1} = 2\underset{\sim}{D}$$

Rivlin - Ericksen Tensors in Convective Coordinate

$$\underset{\sim}{C}_t(\tau) = g_{ij}(\tau)\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A}_n(t) = \left.\frac{\partial^n \underset{\sim}{C}_t(\tau)}{\partial \tau^n}\right)_{\tau=t} = \overset{(n)}{g}_{ij}(t)\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j$$

$$\underset{\sim}{A}_1(t) = \dot{g}_{ij}\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j = 2D_{ij}\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j = 2\underset{\sim}{D}$$

$$\overset{(n)}{g}_{ij}(t) = \underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{A}_n(t)\,\underset{\sim}{b}_j$$

$$\dot{\underset{\sim}{A}}_n(t) = \overset{(n+1)}{g}_{ij}(t)\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j + \overset{(n)}{g}_{ij}(t)\,\dot{\underset{\sim}{b}}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j + \overset{(n)}{g}_{ij}(t)\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \dot{\underset{\sim}{b}}^j$$

از طرفی می‌دانیم که نرخ b_i برابر است:

$$\dot{\underset{\sim}{b}}^i = -\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{b}^i$$

$$\Rightarrow \dot{\underset{\sim}{A}}_n(t) = \underset{\sim}{A}_{n+1}(t) - \overset{(n)}{g}_{ij}\,\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{b}^j - \overset{(n)}{g}_{ij}\,\underset{\sim}{b}^i \otimes \underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{b}^j$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{A}_{n+1}(t) = \dot{\underset{\sim}{A}}_n(t) + \underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{A}_n(t) + \underset{\sim}{A}_n(t)\underset{\sim}{L}$$

$$= \hat{\underset{\sim}{A}}_n$$

$$\underset{\sim}{A}_n^{+}(t) = \underset{\sim}{Q}(t)\, \underset{\sim}{A}_n(t)\, \underset{\sim}{Q}^T(t)$$

$$\underset{\sim}{A}_n(t) = \underset{\sim}{F}^{-T}(t)\, \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, \underset{\sim}{F}^{-1}(t)$$

$$\underset{\sim}{A}_n^{+}(t) = (\underset{\sim}{F}^{+})^{-T}\, \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, (\underset{\sim}{F}^{+})^{-1}$$

$$= \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{A}_n(t)\, \underset{\sim}{Q}^T$$

$$d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{F} d\underset{\sim}{Y} = d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{C}\, d\underset{\sim}{Y}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}(d\underset{\sim}{x} \cdot d\underset{\sim}{y}) = d\underset{\sim}{X} \cdot \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, d\underset{\sim}{Y}$$

$$= \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{y}$$

$$= d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}\, \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, \underset{\sim}{F}^{-1} d\underset{\sim}{y}$$

$$= d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{A}_n(t)\, d\underset{\sim}{y}$$

$$\mathcal{L}: \quad n=1 \quad d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{y} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(ds)^2 = d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{A}_1 d\underset{\sim}{x} = 2 d\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{D}\, d\underset{\sim}{x}$$

$$= 2\, ds \frac{d}{dt}(ds)$$

$$\underset{\sim}{m} = \frac{d\underset{\sim}{x}}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{ds}}{ds} = \underset{\sim}{m} \cdot \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{m} = D_{ij} m^i m^j$$

فرمولبندی معادلات متشکله برای مواد حافظه دار

$$\underset{\sim}{T}(t) = \underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathcal{F}}}\left(\underset{\sim}{F}_t(\tau)\right)$$

در مورد جسم الاستیک : $\underset{\sim}{T}(t) = \hat{\underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{F})$

در مورد جسم با حافظه : $\underset{\sim}{T}(t) = \underset{\sim}{F}\, \underset{\tau=-\infty}{\overset{\tau=t}{\mathcal{F}}}\left(\underset{\sim}{C}_t(\tau)\right) \underset{\sim}{F}^T$

$$= \underset{\sim}{F}\, f(\underset{\sim}{C}^{(n)}(t))\, \underset{\sim}{F}^T$$

$$\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{F}^{-T}\, \underset{\sim}{C}^{(n)}(t)\, \underset{\sim}{F}^{-1}, \quad \underset{\sim}{C}^{(n)}(t) = \underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{A}_n \underset{\sim}{F}$$

$$\therefore \underset{\sim}{T}(t) = \underset{\sim}{F}\, f(\underset{\sim}{F}^T \underset{\sim}{A}_n \underset{\sim}{F})\, \underset{\sim}{F}^T$$

در نهایت : $\underset{\sim}{T}(t) = f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \ldots, \underset{\sim}{A}_n, \ldots)$

برای مواد تراکم ناپذیر :

$$\underset{\sim}{T}(t) = -p\underset{\sim}{I} + f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \ldots)$$

Rivlin-Ericksen Fluid

$$\underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{Q}^T = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{Q}^T, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_2\underset{\sim}{Q}^T, \ldots)$$

* سیال ریولین - اریکسن مرتبه یک $n=1$

$$\underset{\sim}{T} = f(\underset{\sim}{A}_1), \quad \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}_1\underset{\sim}{Q}^T) \quad \forall\, \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{I}$$

$$\underline{T} = \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{A}_1 + \beta_2 \underline{A}_1^2$$

با توجه به اینکه β_0 ، β_1 ، β_2 توابع trA_1 ، trA_1^2 ، trA_1^3 هستند، چون $\underline{A}_1 = 2\underline{D}$ است، سیال ریولین - اریکسون مرتبه یک، همان سیال رایز ریولین است. برای سیال تراکم ناپذیر $tr\underline{A}_1 = 0$

** سیال ریولین - اریکسون مرتبه ۲ :

$$\underline{T} = f(\underline{A}_1, \underline{A}_2)$$

$$= \beta_0 \underline{I} + \beta_1 \underline{A}_1 + \beta_2 \underline{A}_1^2 + \beta_3 \underline{A}_2 + \beta_4 \underline{A}_2^2 + \beta_5 (\underline{A}_1\underline{A}_2 + \underline{A}_2\underline{A}_1)$$

$$+ \beta_6 (\underline{A}_1^2\underline{A}_2 + \underline{A}_2\underline{A}_1^2) + \beta_7 (\underline{A}_1\underline{A}_2^2 + \underline{A}_2^2\underline{A}_1) + \beta_8 (\underline{A}_1^2\underline{A}_2^2 + \underline{A}_2^2\underline{A}_1^2)$$

$\beta_0 , \ldots , \beta_8$ توابع $tr\underline{A}_1$ ، $tr\underline{A}_1^2$ ، $tr\underline{A}_2$ ، $tr\underline{A}_2^2$ ، $tr\underline{A}_1^3$ ، $tr\underline{A}_2^3$ ، $tr\underline{A}_1\underline{A}_2$ ، $tr\underline{A}_1\underline{A}_2^2$ ، $tr\underline{A}_1^2\underline{A}_2$ ، $tr\underline{A}_1^2\underline{A}_2^2$ هستند.

به طور کلی برای سیال تراکم ناپذیر با پیچیدگی n داریم:

$$\underline{T} = -P\underline{I} + f(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n)$$

$$f(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n) = \sum_{\forall \mu_i} K_{\mu_1 \ldots \mu_N} (\underline{A}_{\mu_1} \cdots \underline{A}_{\mu_N} + \text{Transpose})$$

$$K = K(tr(\underline{A}_{\nu_1} \cdots \underline{A}_{\nu_m}))$$

مثال: حالت خاص سیال تراکم ناپذیر مرتبه ۲ اگر دارای حافظه کمرنگ باشد Fading Memory، تغییر شکل‌های کوچک، جریان آهسته:

$$\underline{T} = -P\underline{I} + \beta_1 \underline{A}_1 + \beta_2 \underline{A}_1^2 + \beta_3 \underline{A}_2$$

حال در سیال فوق مؤلفه‌های تانسور تنش کوشی را در حرکت برشی زیر بدست آورید

$$v_1 = k x_2 \quad , \quad v_2 = v_3 = 0$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2\underline{D} = \underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_1^2 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{A}_2 = \underline{L}^T \underline{A}_1 + \underline{A}_1 \underline{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_3 = \underline{A}_4 = \cdots = \underline{0}$$

$$\underline{T} = -P\underline{I} + \beta_1 \underline{A}_1 + \beta_2 \underline{A}_1^2 + \beta_3 \underline{A}_2$$

$$T_{11} = -P + \beta_2 k^2$$

$$T_{22} = -P + \beta_2 k^2 + 2\beta_3 k^2$$

$$T_{33} = -P$$

$$T_{12} = \beta_1 k \quad , \quad T_{13} = T_{23} = 0$$

$$T_{11} - T_{22} = -2\beta_3 k^2 \quad , \quad T_{22} - T_{33} = (\beta_2 + 2\beta_3) k^2$$

بعد برای مثال اول :

$$\underset{\sim}{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{A_1}^2 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{A_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A_1}^3 = \begin{pmatrix} 0 & k^3 & 0 \\ k^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{A_2}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8k^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A_1}\underset{\sim}{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2k^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \underset{\sim}{A_2}\underset{\sim}{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2k^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A_1}^2\underset{\sim}{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{A_2}\underset{\sim}{A_1}^2 , \quad \underset{\sim}{A_1}\underset{\sim}{A_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4k^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A_2}^2\underset{\sim}{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4k^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \underset{\sim}{A_1}^2\underset{\sim}{A_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4k^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$tr\,\underset{\sim}{A_1} = 0$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_2} = 2k^2$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_1}\underset{\sim}{A_2} = 0$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_1}\underset{\sim}{A_2}^2 = 0$

$tr\,\underset{\sim}{A_1}^2 = k^2$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_2}^2 = 4k^4$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_2}\underset{\sim}{A_1} = 0$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_2}^2\underset{\sim}{A_1} = 0$

$tr\,\underset{\sim}{A_1}^3 = 0$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_2}^3 = 8k^2$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_1}^2\underset{\sim}{A_2} = 2k^4$ $\quad tr\,\underset{\sim}{A_1}^2\underset{\sim}{A_2}^2 = 4k^6$

در این صورت داریم :

$T_{11} = -p + \beta_2 k^2$

$T_{22} = -p + \beta_2 k^2 + 2\beta_3 k^2 + 4\beta_4 k^4 + 2\beta_5 k^4 + 4\beta_6 k^6$

$T_{33} = -p$

$T_{12} = \beta_1 k + 2\beta_5 k^3 + 4\beta_7 k^5$

$T_{11} - T_{22}$ تابع زوج از k

$T_{22} - T_{33}$ تابع زوج از k

T_{12} تابع فرد از k

Longitudinal Fluid (Flows)

$v_1 = v_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad v_i = \omega\,\delta_{i3}$

$v_3 = \omega = \omega(x_1, x_2)$

برای سیال تراکم ناپذیر مرتبه ۲ :

$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \beta_1 A^{(1)}_{ij} + \beta_2 A^{(1)}_{ik} A^{(1)}_{kj}$
$\quad + \beta_3 A^{(2)}_{ij}$

$A^{(1)}_{ij} = 2D_{ij} = 2(v_{i,j} + v_{j,i})/2 = \omega_{,j}\,\delta_{i3} + \omega_{,i}\,\delta_{j3}$

$A^{(1)}_{ik} A^{(1)}_{kj} = (\omega_{,k}\,\delta_{i3} + \omega_{,i}\,\delta_{k3})(\omega_{,j}\,\delta_{k3} + \omega_{,k}\,\delta_{j3})$

$\quad = \omega_{,k}\,\omega_{,j}\,\delta_{k3}\,\delta_{i3} + \omega_{,i}\,\omega_{,j}$

$A^{(2)}_{ij} = v_k\,A^{(1)}_{ij,k} + v_{k,j}\,A^{(1)}_{ik} + v_{k,i}\,A^{(1)}_{kj}$

$\quad = (\omega\,\delta_{k3})(\omega_{,jk}\,\delta_{i3} + \omega_{,ik}\,\delta_{j3}) +$
$\quad + (\omega_{,j}\,\delta_{k3})(\omega_{,k}\,\delta_{i3} + \omega_{,i}\,\delta_{k3}) +$
$\quad + (\omega_{,i}\,\delta_{k3})(\omega_{,j}\,\delta_{k3} + \omega_{,k}\,\delta_{j3}) = 2\omega_{,i}\,\omega_{,j}$

$T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \beta_1(\omega_{,j}\,\delta_{i3} + \omega_{,i}\,\delta_{j3}) + \beta_2(\omega_{,k}\,\omega_{,k}\,\delta_{i3}\delta_{j3}$
$\quad + \omega_{,i}\,\omega_{,j}) + 2\beta_3\,\omega_{,i}\,\omega_{,j}$

در نتیجه [illegible] سپس معادلات حرکت را بررسی می‌کنیم

$T_{ij,j} = \rho a_i = 0$

$-p_{,i} + \beta_1\,\omega_{,jj}\,\delta_{i3} + \beta_2(\omega_{,i}\,\omega_{,j})_{,j} + 2\beta_3(\omega_{,i}\,\omega_{,j})_{,j} = 0$

$\Rightarrow -p_{,i} + \beta_1\,\omega_{,jj}\,\delta_{i3} + (\beta_2 + 2\beta_3)(\omega_{,i}\,\omega_{,j})_{,j} = 0$

$\dfrac{\partial p}{\partial x_3} = P \qquad \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = -P \longrightarrow p = Px_3 + \tilde{p}(x_1, x_2)$

$\Rightarrow p_{,\alpha} = (\beta_2 + 2\beta_3)(\omega_{,\alpha}\,\omega_{,\beta})_{,\beta}$

$\quad = (\beta_2 + 2\beta_3)(\omega_{,\alpha\beta}\,\omega_{,\beta} + \omega_{,\alpha}\,\omega_{,\beta\beta})$

$p_{,3} = P = \beta_1\,\omega_{,\alpha\alpha} \quad \therefore \quad \beta_1 \nabla^2\omega = P$

در معادله اول فوق به جای $\nabla^2\omega$ از معادله فوق جایگذاری کرده و انتگرال می‌گیریم

$\tilde{p} = \frac{1}{2}(\beta_1 + 2\beta_3)\left(\omega_{,\beta}\,\omega_{,\beta} + \dfrac{2P}{\beta_1}\,\omega\right)$

$\Rightarrow T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\left(\omega_{,\gamma}\,\omega_{,\gamma} + \dfrac{2P}{\beta_1}\,\omega\right)\delta_{\alpha\beta}$

$\quad - Px_3\,\delta_{\alpha\beta} + (\beta_2 + 2\beta_3)\,\omega_{,\alpha}\,\omega_{,\beta}$

$T_{33} = -\frac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\left(\omega_{,\gamma}\,\omega_{,\gamma} + \dfrac{2P}{\beta_1}\,\omega\right)$

$\quad - Px_3 + \beta_2\,\omega_{,\gamma}\,\omega_{,\gamma}$

Simara

$T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = \beta_1 \omega_{,3}$

نیروی وارده بر مرز که برای آن $\omega = 0$ (اتکای مرزی سطح)

$\beta_1 \omega_{,\beta\beta} = P$

$N = T_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$

$= \frac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\,\omega_{,\alpha}\omega_{,\alpha} - P x_3$

اگر سطح مقطع را بیضی زیر در نظر بگیریم:

$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2 = 0$

با توجه به اینکه $\nabla^2 \omega = cte$ است، لذا می‌توان ω را ضریبی از معادله بیضی در نظر گرفت که شرط صفر شدن روی مرز برقرار باشد

$\omega = K(b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2)$

$\omega_{,\beta\beta} = K(2a^2 + 2b^2) = P/\beta_1 \Rightarrow K = \frac{P}{2\beta_1(a^2+b^2)}$

$\Rightarrow \omega = \frac{P}{2\beta_1(a^2+b^2)}(b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 - a^2 b^2)$

نیروی وارد بر سطح فوق

$N = \frac{1}{2}(\beta_2 + 2\beta_3)\left[\frac{P}{\beta_1(a^2+b^2)}\right]^2 (b^4 x_1^2 + a^4 x_2^2) - P x_3$

Fine.....

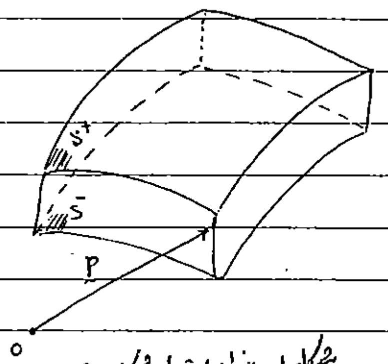
به پایان آمد این دفتر، حکایت همچنان باقی!

۸۲/۹/۲۷ ، 11.15 am

تئوری محیط‌های پیوسته

Continuum theory for oriented media
Cosserat continua

۱. مقدمه: بدنه پیوسته‌ای شکل R را در فضای سه بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید.
اگر مختصات کانوکتیو $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ را
در این فضا به گونه‌ای در نظر بگیریم که
R به صورت زیر تعریف شود



$$\begin{cases} S^- & \theta^3 = \xi = \alpha(\theta^\alpha) \ , \ \alpha < 0 \\ S^+ & \theta^3 = \xi = \beta(\theta^\alpha) \ , \ \beta > 0 \\ & f(\theta^1, \theta^2) = 0 \quad \alpha < \xi < \beta \end{cases} \tag{1}$$

شکل ۱. بدنه پیوسته‌ای شکل R

در این صورت بردار موقعیت $\underline{P}$ در خصوص نقطه دلخواهی در R را در زمان t
می‌توان به صورت زیر نوشت:

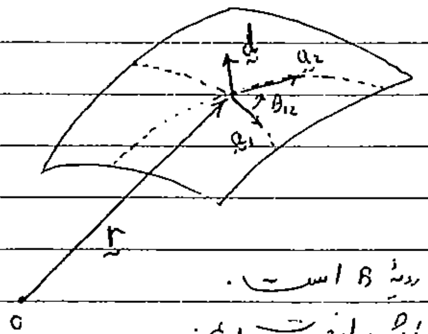
$$\underline{P} = \underline{P}(\theta^\alpha, \xi, t) = \underline{r}(\theta^\alpha, t) + \sum_{N=1}^{\infty} \xi^N \underline{d}_N(\theta^\alpha, t) \tag{2}$$

به طوری که $\underline{r}$ بردار موقعیت سطح $\xi = 0$ و $\underline{d}_N$ به ازای $N=1,\dots,\infty$
دنباله‌ای از بردارها است که دیرکتور نامیده می‌شوند. با اعمال سازی متغیر ξ که در
جهت ضخامت پیوسته تغییر کند، در بردار موقعیت $\underline{P}$ به طبقه دیگری

یک نوع از بدنه R بر حسب ویژگی‌های سطح $\xi = 0$ قابل بیان هستند.
رابطه فوق در واقع ایده اساسی شکل‌گیری تئوری دو بعدی پوسته‌ای می‌باشد. با جایگذاری
رابطه (2) در معادلات سه بعدی میدان و انتگرال‌گیری در جهت ضخامت پوسته
به معادلاتی می‌رسیم که در واقع بیان معادلات دو بعدی میدان در خصوص یک نوع
دو بعدی غیر اقلیدسی می‌باشند.

۲. هندسه یک محیط پیوسته جهت‌دار

رویه B را در فضای سه بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید. به هر نقطه روی B یک بردار
موقعیت $\underline{r}$ و یک بردار بنام دیرکتور نسبت می‌دهیم. بردار دیرکتور $\underline{d}$ لزوماً
عمود بر رویه B نیست اما در داخل B قرار ندارد و طول آن در حرکت تغییر نمی‌کند.



بردارهای پایه سطحی عبارتند از

$$\underline{a}_\alpha = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \underline{r}(\theta^1, \theta^2, t) \tag{3}$$

به طوری که θ^α مختصات گوسی نشانده شده بر روی رویه B است.
حال اگر $\underline{a}_3$ بردار یکه عمود بر رویه B باشد در این صورت داریم:

$$\underline{a}_3 = \frac{\underline{a}_1 \times \underline{a}_2}{|\underline{a}_1| \cdot |\underline{a}_2| \cdot \sin\theta_{12}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \underline{a}_1 \times \underline{a}_2 \tag{4}$$

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = - \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_{3,\beta} = \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} \tag{5}$$

$$\underset{\sim}{a}_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{a}_\alpha \cdot \underset{\sim}{a}_\beta \qquad \underset{\sim}{a}^\alpha = a^{\alpha\beta}\,\underset{\sim}{a}_\beta \qquad (6)$$

$$\underset{\sim}{a}_{\alpha|\beta} = b_{\alpha\beta}\,\underset{\sim}{a}_3 \quad : \text{رابطهٔ گاوس}$$
$$\underset{\sim}{a}_{3,\alpha} = -\,b^\beta_\alpha\,\underset{\sim}{a}_\beta \quad : \text{رابطهٔ ویگارتن} \qquad (7)$$
$$b_{\alpha\beta|\gamma} = b_{\alpha\gamma|\beta} \quad : \text{رابطهٔ کدازی}$$

به قسمی که در روابط فوق $a_{\alpha\beta}$ و $b_{\alpha\beta}$ به ترتیب فرمهای اساسی اول و دوم رویه هستند. بردار دیرکتور $\underset{\sim}{d}$ در خصوص مدل کردن تأثیر نقاط اطراف رویهٔ B بر روی رفتار این سطح در نظر گرفته می‌شود لذا نمی‌تواند یک بردار مماس بر سطح باشد یعنی داشته باشیم:

$$[\underset{\sim}{a}_1 , \underset{\sim}{a}_2 , \underset{\sim}{d}\,] > 0 \qquad (8)$$

کلیهٔ روابط فوق در هیئت مرجع در زمان $t=0$ به ازای بردار موقعیت $\underset{\sim}{R}$ و بردار دیرکتور $\underset{\sim}{D}$ صادق هستند و به طور خلاصه داریم:

$$\underset{\sim}{R}(\theta^\alpha) = \underset{\sim}{r}(\theta^\alpha, 0)$$
$$\underset{\sim}{D}(\theta^\alpha) = \underset{\sim}{d}(\theta^\alpha, 0)$$
$$\underset{\sim}{A}_\alpha = \frac{\partial \underset{\sim}{R}}{\partial \theta^\alpha} \qquad (9)$$
$$A_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{A}_\alpha \cdot \underset{\sim}{A}_\beta$$
$$B_{\alpha\beta} = -\,\underset{\sim}{A}_\alpha \cdot \underset{\sim}{A}_{3,\beta}$$

میدانهای برداری سه بعدی $\underset{\sim}{r}$ و $\underset{\sim}{d}$ بایکدیگر وضعیت رویهٔ B را مشخص می‌کنند. استفاده از رابطهٔ (۵) به همراه معادلات سه بعدی میدان، استخراج معادلات حاکم بر رفتار یک پوسته به روش سه بعدی نامیده می‌شود و به ازای مقادیر N مرتبه‌ای مختلف تغییر شکل برشی در جهت ضخامت پوسته را پوشش می‌دهد. مثلاً اگر N تنها مقدار صحیح ۱ را اختیار کند در اینصورت تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی نامیده می‌شود. اگر $N = 1, 2$ در اینصورت تئوری مرتبه دوم تغییر شکل برشی نامیده می‌شود. در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی خطوط در جهت خارج از رویهٔ $\xi = 0$، بعد از تغییر شکل بصورت خط باقی می‌مانند و در تئوری مرتبه دوم تغییر شکل برشی خطوط در جهت خارج از رویهٔ $\xi = 0$، بعد از تغییر شکل حداکثر بصورت یک منحنی درجه دوم در می‌آیند و به همین ترتیب در مورد تئوری‌های مرتبه بالاتر. در تئوری محیط پوستهٔ جهت‌دار هر چند تنها یک میدان دیرکتور در محاسبات وارد می‌شود، لیکن هیچ یک از محدودیتهای تئوری سه بعدی در خصوص مرتبهٔ تغییر شکل برشی وجود ندارد و به بیان دیگر خطوط در جهت خارج از رویهٔ B بعد از تغییر به هر رتبهٔ دلخواهی می‌توانند در آیند. این مسئله در روابط معادلات مشکله کاملاً لحاظ می‌شود.

با فرض اینکه میدانهای برداری $\underset{\sim}{r}$ و $\underset{\sim}{d}$ پیوسته و مشتق‌پذیر نسبت به θ^α و t باشند در اینصورت میدانهای برداری سه بعدی $\underset{\sim}{v}$ و $\underset{\sim}{w}$ بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\underset{\sim}{v} = \frac{d}{dt}\,\underset{\sim}{r}(\theta^\alpha, t) \quad , \quad \underset{\sim}{w} = \frac{d}{dt}\,\underset{\sim}{d}(\theta^\alpha, t) \qquad (10)$$
$$\underset{\sim}{v} = \dot{\underset{\sim}{r}} \quad , \quad \underset{\sim}{w} = \dot{\underset{\sim}{d}}$$

$\underset{\sim}{v}$ بردار سرعت و $\underset{\sim}{w}$ بردار سرعت دیرکتور نامیده می‌شود. در خصوص بدست آوردن ویژگیهای هندسی حرکت رویهٔ B نیاز به خاصیت گرادیان میدانهای برداری اخیر داریم:

۲-۱ گرادیان بردار سرعت: $\dot{\underline{a}}_3 , \underline{v}_{,\alpha}$

$$\underline{v} = v^i \underline{a}_i = v^\alpha \underline{a}_\alpha + v^3 \underline{a}_3$$

$$\underline{v}_{,\alpha} = v^\beta_{,\alpha} \underline{a}_\beta + v^\beta \underline{a}_{\beta,\alpha} + v^3_{,\alpha} \underline{a}_3 + v^3 \underline{a}_{3,\alpha}$$

$$= v^\beta|_\alpha \underline{a}_\beta - \left\{ {\beta \atop \alpha\gamma} \right\} v^\gamma \underline{a}_\beta + v^\beta b_{\alpha\beta} \underline{a}_3 + \cancel{v^\beta \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \underline{a}_\gamma} +$$
$$+ v^3_{,\alpha} \underline{a}_3 - b^\beta_\alpha \underline{a}_\beta v^3$$

$$= (v^\beta|_\alpha - b^\beta_\alpha v^3) \underline{a}_\beta + (v^3_{,\alpha} + b_{\alpha\beta} v^\beta) \underline{a}_3$$

$$\therefore \quad \dot{\underline{a}}_\alpha = \underline{v}_{,\alpha} = (v^i \underline{a}_i)_{,\alpha} = v^i_{,\alpha} \underline{a}_i = v_{i\alpha} \underline{a}^i$$

به طوری که:

$$v_{\beta\alpha} = v_{\beta|\alpha} - b_{\beta\alpha} v_3 \quad , \quad v_{3\alpha} = v_{3,\alpha} + b^\beta_\alpha v_\beta$$

$$\dot{\underline{a}}_3 = -(\underline{a}_3 \cdot \underline{v}_{,\alpha}) \underline{a}^\alpha = -v_{3\alpha} \underline{a}^\alpha = -(v_{3,\alpha} + b_{\alpha\beta} v^\beta) \underline{a}^\alpha$$

هر یک از بردارهای $\dot{\underline{a}}_i$ به صورت ترکیب خطی بردارهای $\underline{a}^i$ قابل بیان هستند

$$\dot{\underline{a}}_i = C_{mi} \underline{a}^m \longrightarrow C_{mi} = \underline{a}_m \cdot \dot{\underline{a}}_i = l_{mi} + W_{mi}$$

یا با علائم دیگر:

$$\dot{\underline{a}}_i = L_{ji} \underline{a}^j \longrightarrow L_{ji} = \underline{a}_j \cdot \dot{\underline{a}}_i = D_{ji} + W_{ji}$$

به طوری که:

$$2D_{ij} = \underline{a}_i \cdot \dot{\underline{a}}_j + \dot{\underline{a}}_i \cdot \underline{a}_j = \dot{a}_{ij} = 2D_{ji}$$

$$\cancel{2W_{ij} = \underline{a}_i \dot{\underline{a}}_j - \dot{\underline{a}}_i \underline{a}_j = -2W_{ji}}$$

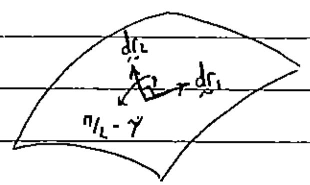
مؤلفه‌های سطحی تانسورهای $\underline{D}$ ، $\underline{W}$ عبارتند از:

$$2D_{\alpha\beta} = \underline{a}_\alpha \dot{\underline{a}}_\beta + \dot{\underline{a}}_\alpha \underline{a}_\beta = \underline{a}_\alpha \underline{v}_{,\beta} + \underline{v}_{,\alpha} \underline{a}_\beta$$
$$= \underline{a}_\alpha v_{i\beta} \underline{a}^i + v_{i\alpha} \underline{a}^i \underline{a}_\beta = v_{\alpha\beta} + v_{\beta\alpha}$$
$$= v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha} - 2 b_{\alpha\beta} v_3$$

$$2D_{\alpha 3} = \underline{a}_\alpha \dot{\underline{a}}_3 + \dot{\underline{a}}_\alpha \underline{a}_3 = \underline{a}_\alpha (-v_{3\beta} \underline{a}^\beta) + \underline{v}_{,\alpha} \underline{a}_3$$
$$= -v_{3\alpha} + v_{i\alpha} \underline{a}^i \underline{a}_3 = -v_{3\alpha} + v_{3\alpha}$$
$$= 0$$

$$2D_{33} = \underline{a}_3 \dot{\underline{a}}_3 + \dot{\underline{a}}_3 \underline{a}_3 = 2 \underline{a}_3 \cdot \dot{\underline{a}}_3$$
$$= -2 v_{3\alpha} \underline{a}^\alpha \underline{a}_3$$
$$= 0$$

$D_{\alpha\beta}$ تانسور نرخ تغییر فرم سطحی است. لذا اگر دو بردار بسیار کوچک عمود بر هم را بر روی رویه B در نظر بگیریم



$$\dot{\lambda}/\lambda = D_{\alpha\beta} m^\alpha m^\beta$$

$$\dot{\gamma} = 2 D_{\alpha\beta} m^\alpha_{(1)} m^\beta_{(2)}$$

که λ اتساع در جهت بردار یکه سطحی $\underline{m}$ و γ زاویه برش بین دو بردار یکه سطحی عمود بر هم است.

$$2W_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{a}_\alpha \cdot \dot{\underset{\sim}{a}}_\beta - \dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha \underset{\sim}{a}_\beta = \underset{\sim}{a}_\alpha \underset{\sim}{v}_{,\beta} - \underset{\sim}{v}_{,\alpha} \underset{\sim}{a}_\beta$$

$$= v_{i\beta} \underset{\sim}{a}^i \underset{\sim}{a}_\alpha - v_{i\alpha} \underset{\sim}{a}^i \underset{\sim}{a}_\beta$$

$$= v_{\alpha\beta} - v_{\beta\alpha} = v_{\alpha|\beta} - v_{\beta|\alpha}$$

$$2W_{\alpha 3} = \underset{\sim}{a}_\alpha \dot{\underset{\sim}{a}}_3 - \dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha \underset{\sim}{a}_3 = -v_{3\beta} \underset{\sim}{a}^\beta \underset{\sim}{a}_\alpha - v_{i\alpha} \underset{\sim}{a}^i \underset{\sim}{a}_3$$

$$= -v_{3\alpha} - v_{3\alpha} = -2v_{3\alpha} \quad \therefore \quad W_{\alpha 3} = -v_{3\alpha}$$

$$2W_{33} = \underset{\sim}{a}_3 \cdot \dot{\underset{\sim}{a}}_3 - \dot{\underset{\sim}{a}}_3 \underset{\sim}{a}_3 = 0$$

$W_{\alpha\beta}$ تانسور گردابی سطحی نامیده می‌شود. سایر مشتقات زمانی نیز قابل محاسبه هستند

$$\dot{a} = \frac{d}{dt} \det a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a}{\partial a_{\alpha\beta}} \dot{a}_{\alpha\beta} = a a^{\alpha\beta} \dot{a}_{\alpha\beta} = a a^{\alpha\beta} 2D_{\alpha\beta}$$

$$= 2a D^\alpha_\alpha$$

اگر $d\sigma$ المان سطح در زمان t و $d\Sigma$ المان سطح در زمان مرجع باشد در اینصورت داریم:

$$d\sigma = J\, d\Sigma \Rightarrow J = \sqrt{a/A} = \rho_0/\rho$$

$$AJ^2 = a \Rightarrow 2AJ\dot{J} = \dot{a} = 2a D^\alpha_\alpha \quad \therefore \quad \dot{J} = J D^\alpha_\alpha$$

همچنین در مورد $\dot{a}^{\alpha\beta}$ داریم:

$$\dot{a}^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\gamma} a^{\beta\rho} \dot{a}_{\gamma\rho}$$

$$= -2 a^{\alpha\gamma} a^{\beta\rho} D_{\gamma\rho} = -2D^{\alpha\beta}$$

و نیز در مورد $\dot{\underset{\sim}{a}}^\alpha$ داریم:

$$\dot{\underset{\sim}{a}}^\alpha = a^{\alpha\beta} \dot{\underset{\sim}{a}}_\beta + \dot{a}^{\alpha\beta} \underset{\sim}{a}_\beta = a^{\alpha\beta} v_{i\beta} \underset{\sim}{a}^i - 2D^{\alpha\beta} \underset{\sim}{a}_\beta$$

$$= a^{\alpha\beta} (W_{i\beta} - D_{i\beta}) \underset{\sim}{a}^i$$

$$\dot{\underset{\sim}{a}}^3 = \dot{\underset{\sim}{a}}_3 = -v_{3\alpha} \underset{\sim}{a}^\alpha = W_{\alpha 3} \underset{\sim}{a}^\alpha$$

۲-۲- گرادیان بردار و سرعت بردار

$$\underset{\sim}{d} = d_i \underset{\sim}{a}^i = d_\alpha \underset{\sim}{a}^\alpha + d_3 \underset{\sim}{a}^3$$

$$\underset{\sim}{d}_{,\alpha} = \lambda_{i\alpha} \underset{\sim}{a}^i$$

به طوری که: $\lambda_{\alpha\beta} = d_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} d_3 \quad , \quad \lambda_{3\alpha} = d_{3,\alpha} + b_{\alpha\beta} d^\beta$

$$\underset{\sim}{\omega} = \dot{\underset{\sim}{d}} = \dot{d}_i \underset{\sim}{a}^i + d_i \dot{\underset{\sim}{a}}^i = \dot{d}_i \underset{\sim}{a}^i + d_\alpha \dot{\underset{\sim}{a}}^\alpha + d_3 \dot{\underset{\sim}{a}}^3$$

$$= \dot{d}_i \underset{\sim}{a}^i + d_\alpha a^{\alpha\beta} (W_{i\beta} - D_{i\beta}) \underset{\sim}{a}^i - d_3 v_{3\alpha} \underset{\sim}{a}^\alpha$$

$$= (\dot{d}_i + d_\alpha a^{\alpha\beta} (W_{i\beta} - D_{i\beta}) + d_3 W_{i3}) \underset{\sim}{a}^i$$

$$= (\dot{d}_i + d^m (W_{im} - D_{im})) \underset{\sim}{a}^i$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} = (\dot{\lambda}_{i\alpha} + \lambda^\beta_{.\alpha} (W_{i\beta} - D_{i\beta}) + \lambda^3_{.\alpha} W_{i3}) \underset{\sim}{a}^i$$

۲-۳ مؤلفه‌های کرنش دلخواه

مؤلفه‌های بردار موقعیت $\mathbf{r}$ عبارتند از سه مؤلفه فضایی این بردار، لیکن بردار $\mathbf{r}$ برحسب دو مختصه θ^1, θ^2 قابل بیان است. مؤلفه‌های گرادیان بردار موقعیت $\mathbf{r}$ همان مؤلفه‌های تانسور متریک هستند

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^\alpha, t)$$

$$\mathbf{r}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta}\, \mathbf{a}^\beta$$

مؤلفه‌های کرنش سطحی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_{\alpha\beta} \triangleq \tfrac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta})$$

با ایده گرفتن از رابطه فوق مؤلفه‌های تانسور انحناء را برحسب مؤلفه‌های گرادیان دایرکتور تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{d}_{,\alpha} = \lambda_{i\alpha}\, \mathbf{a}^i = \lambda_{\beta\alpha}\, \mathbf{a}^\beta + \lambda_{3\alpha}\, \mathbf{a}^3$$

$$\kappa_{\alpha\beta} \triangleq \lambda_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} \qquad \kappa_{3\alpha} \triangleq \lambda_{3\alpha} - \Lambda_{3\alpha}$$

همچنین کرنش‌های برشی و کرنش در جهت ضخامت پوسته عبارتند از

$$\gamma_\alpha \triangleq d_\alpha - D_\alpha$$

$$\gamma_3 \triangleq d_3 - D_3$$

۴-۳ مؤلفه‌های کرنش در تئوری تغییرشکل‌های بسیار کوچک

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} = u^i \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{v} = \varepsilon \dot{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} + \varepsilon \boldsymbol{\delta} \quad , \quad \boldsymbol{\delta} = \delta^i \mathbf{A}_i \longrightarrow \mathbf{w} = \varepsilon \dot{\boldsymbol{\delta}} \qquad \varepsilon \ll 1$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \varepsilon \boldsymbol{\beta} \quad , \quad \boldsymbol{\beta} = \beta^\alpha \mathbf{A}_\alpha$$

در اینصورت بردارهای پایه هشت شکل عبارتند از

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \varepsilon \mathbf{u}_{,\alpha} \quad , \quad \mathbf{d}_{,\alpha} = \mathbf{D}_{,\alpha} + \varepsilon \boldsymbol{\delta}_{,\alpha}$$

$$\Rightarrow a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = A_{\alpha\beta} + \varepsilon(\mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}\mathbf{A}_\alpha) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} = B_{\alpha\beta} - \varepsilon(\mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{A}_{3,\beta} + \mathbf{A}_\alpha \boldsymbol{\beta}_{,\beta}) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow d_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{d} = D_\alpha + \varepsilon(\mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{D} + \mathbf{A}_\alpha \boldsymbol{\delta}) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow d_3 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{d} = D_3 + \varepsilon(\mathbf{A}_3 \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\beta}) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\beta\alpha} = \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} = \Lambda_{\beta\alpha} + \varepsilon(\mathbf{A}_\beta \boldsymbol{\delta}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_{3\alpha} = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} = \Lambda_{3\alpha} + \varepsilon(\mathbf{A}_3 \boldsymbol{\delta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\beta}\, \mathbf{D}_{,\alpha}) + O(\varepsilon^2)$$

با صرفنظر از توانهای بالای ε و با قرار دادن $\varepsilon = 1$ داریم:

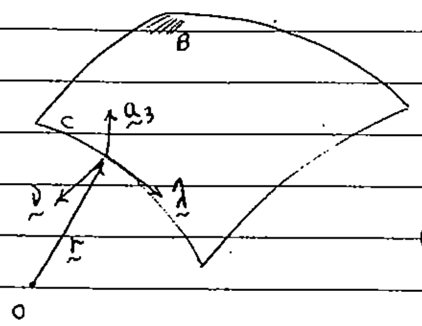
$$e_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{A}_\beta + \mathbf{u}_{,\beta}\mathbf{A}_\alpha)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\delta}_{,\beta} + \mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{D}_{,\beta} \qquad \kappa_{3\alpha} = \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\delta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{D}_{,\alpha}$$

$$\gamma_\alpha = \mathbf{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{u}_{,\alpha}\mathbf{D} \qquad \gamma_3 = \mathbf{A}_3 \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{D}$$

$$\rho = \rho_0 (1 - e^\alpha_\alpha)$$

۴- معادلات میدان و معادلات تعادل



رویه B را در نظر بگیرید. اگر c یک خم بسته باشد که B را دور زده است، در اینصورت منحنی c که همان مرز B یا ∂B است بصورت پارامتری $\theta^\alpha = \theta^\alpha(s)$ قابل بیان است (s پارامتر طول است)

بردار یکه λ مماس بر مرز برابر است با

$$\lambda = \frac{\partial r}{\partial s} = \lambda^\alpha a_\alpha , \quad \lambda^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha(s)}{\partial s}$$

و بردار ν عمود بر مرز c برابر است با

$$\nu = \lambda \times a_3 = \nu^\alpha a_\alpha = \nu_\alpha a^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda^\beta a^\alpha$$

$$\lambda = a_3 \times \nu = a_3 \times \nu_\alpha a^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \nu_\alpha a_\beta$$

حال میدانهای برداری سه بعدی نیروی مرزی $N(\theta^\alpha, t, \nu)$ و کوپل مرزی $M(\theta^\alpha, t, \nu)$ را تعریف می کنیم به قسمی که به ازای یک میدان سرعت دلخواه v، کمیت $N \cdot v$ نرخ توان تامین شده به جزء B به ازای طول واحد از مرز c باشد و به ازای یک میدان سرعت دیرکتور دلخواه w، کمیت $M \cdot w$ نرخ توان تامین شده به جزء B به ازای طول واحد از مرز c باشد.

مشابه میدانهای برداری تعریف شده روی مرز، میدانهای نیروی جسم $f(\theta^\alpha, t)$ و کوپل دیرکتور جسم $l(\theta^\alpha, t)$ را به ازای سطح واحد از رویه B تعریف می کنیم. البته منظور از سطح واحد، جرم واحد موجود در سطح است.

با تعریف ε: انرژی داخلی ویژه بر واحد جرم از رویه B و r: نرخ تامین حرارت بر واحد جرم از رویه B، h: شار حرارتی بر واحد طول از مرز c و η: آنتروپی ویژه بر واحد جرم از رویه B به گسترش معادلات تعادل می پردازیم:

الف) اصل بقای جرم

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \, d\sigma = 0$$

ب) اصل بقای اندازه حرکت خطی

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho v \, d\sigma = \int_B \rho f \, d\sigma + \int_{\partial B} N \, ds$$

ج) اصل بقای اندازه حرکت دیرکتور

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \alpha w \, d\sigma = \int_B \rho l \, d\sigma - \int_B m \, d\sigma^{(*)} + \int_{\partial B} M \, ds$$

د) اصل بقای انرژی

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \left[\varepsilon + \tfrac{1}{2} v \cdot v + \tfrac{1}{2} \alpha w \cdot w\right] d\sigma =$$

$$\int_B \rho (f \cdot v + l \cdot w) \, d\sigma + \int_{\partial B} (N \cdot v + M \cdot w) \, ds$$

$$+ \int_B \rho r \, d\sigma - \int_{\partial B} h \, ds$$

---

* m کوپل دیرکتور ذاتی نامیده می شود که در واقع باعث بالانس در ترمیم اصل بقای اندازه حرکت دیرکتوری شود به قسمی که خصوصیت غیر قطبی بودن ماده حفظ شود.

هـ) اصل تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho\,(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{d}\times\alpha\underset{\sim}{\omega})\,d\sigma = \int_B (\underset{\sim}{r}\times\rho\underset{\sim}{f}+\underset{\sim}{d}\times\rho\underset{\sim}{l})\,d\sigma + \int_{\partial B}(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{N}+\underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{M})\,ds$$

و) قانون دوم ترمودینامیک

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho\eta\,d\sigma \geqslant \int_B \rho\frac{r}{\theta}\,d\sigma - \int_{\partial B}\frac{h}{\theta}\,ds$$

حال به استخراج فرم موضعی معادلات میدانی می‌پردازیم. در مورد اصل بقای جرم داریم:

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho\,d\sigma = \frac{d}{dt}\int_B \rho J\,d\Sigma = \int_B (\dot\rho J+\rho\dot J)\,d\Sigma$$

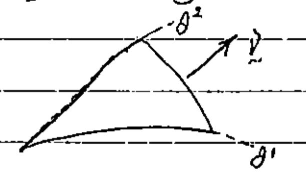
$$= \int_B (\dot\rho+\rho D^\alpha_\alpha)\,d\sigma = 0 \qquad \therefore\ \dot\rho+\rho D^\alpha_\alpha = 0$$

لذا فرم موضعی معادله اصل بقای جرم به صورت‌های زیر قابل ارائه است:

$$\rho_0 = J\rho$$

$$\dot\rho+\rho D^\alpha_\alpha = \dot\rho+\rho(v^\alpha|_\alpha - b^\alpha_\alpha v_3) = 0$$

با اعمال اصل تعادل اندازه حرکت خطی به دنبال صفحه‌ای داریم:



$$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}^\alpha \nu_\alpha$$

$$\underset{\sim}{N}^\alpha = \underset{\sim}{n}^{(\alpha)}\sqrt{a^{\alpha\alpha}}$$

با توجه به اینکه معادله فوق برای هر عضو دلخواه از B درست است و $\underset{\sim}{n}^{(\alpha)}$ نیروی تنش اعمالی بر این مرزی باشد. لذا فرم موضعی اندازه حرکت خطی بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_B [\rho(\underset{\sim}{\dot v}-\underset{\sim}{f}) - \underset{\sim}{N}^\alpha|_\alpha]\,d\sigma = 0$$

$$\therefore\ \underset{\sim}{N}^\alpha|_\alpha + \rho\underset{\sim}{f} = \rho\underset{\sim}{\dot v}$$

به طور مشابه با اعمال اصل تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای به دنبال صفحه‌ای نتیجه می‌گیریم:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}^\alpha \nu_\alpha \quad , \quad \underset{\sim}{M}^\alpha = \underset{\sim}{m}^{(\alpha)}\sqrt{a^{\alpha\alpha}}$$

$$\frac{d}{dt}\int_B \rho(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{d}\times\alpha\underset{\sim}{\omega})\,d\sigma = \int_B \rho(\cancel{\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{\dot v}}+\underset{\sim}{d}\times\alpha\underset{\sim}{\dot\omega})\,d\sigma$$

$$= \int_B (\cancel{\underset{\sim}{r}\times\rho\underset{\sim}{f}}+\underset{\sim}{d}\times\rho\underset{\sim}{l})\,d\sigma + \int_B (\cancel{\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{N}^\alpha|_\alpha}+\underset{\sim}{a}_\alpha\times\underset{\sim}{N}^\alpha)\,d\sigma$$

$$+\int_B (\underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{M}^\alpha)|_\alpha\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_B \rho(\underset{\sim}{d}\times\alpha\underset{\sim}{\dot\omega})\,d\sigma = \int_B [\rho(\underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{l})+\underset{\sim}{a}_\alpha\times\underset{\sim}{N}^\alpha+(\underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{M}^\alpha)|_\alpha]\,d\sigma$$

$$\therefore\ \underset{\sim}{a}_\alpha\times\underset{\sim}{N}^\alpha + \rho\underset{\sim}{d}\times(\underset{\sim}{l}-\alpha\underset{\sim}{\dot\omega}) + (\underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{M}^\alpha)|_\alpha = 0$$

فرم موضعی اصل تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای عبارت است از:

$$\underset{\sim}{M}^\alpha|_\alpha + \rho(\underset{\sim}{l}-\alpha\underset{\sim}{\dot\omega}) = \underset{\sim}{m}$$

SIMARA

در مورد اصل تعادل انرژی داریم:

$$\rho\dot{\varepsilon} = \rho r - q^\alpha|_\alpha + P$$

P توان مکانیکی است: $P = \tilde{N}^\alpha \cdot \tilde{v}_{,\alpha} + \tilde{m}\cdot\dot{\tilde{w}} + \tilde{M}^\alpha \cdot \tilde{w}_{,\alpha}$

با اعمال اصل تعادل انرژی به دنباله منحنیها داریم:

$$h = h_{(\nu)} = -h_{(-\nu)}$$

$$h = q^\alpha \nu_\alpha = \tilde{q}\cdot\tilde{\nu} \quad , \quad q^\alpha = h^{(\alpha)}\sqrt{a^{\alpha\alpha}}$$

فرم موضعی قانون دوم ترمودینامیک نیز قابل ارائه است

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho r + q^\alpha|_\alpha - q^\alpha\frac{\theta_{,\alpha}}{\theta} \geq 0$$

که با ترکیب با اصل تعادل انرژی داریم:

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + P - q^\alpha\frac{\theta_{,\alpha}}{\theta} \geq 0$$

یا بر حسب انرژی آزاد هلمهولتز $\psi = \varepsilon - \eta\theta$

$$-\rho\dot{\psi} - \rho\eta\dot{\theta} + P - q^\alpha\frac{\theta_{,\alpha}}{\theta} \geq 0$$

همچنین با تعریف مؤلفه‌های بردار $\tilde{N}^\alpha$ و $\tilde{M}^\alpha$ به صورت

$$\tilde{M}^\alpha = M^{\alpha i}\tilde{a}_i = M^{\alpha\beta}\tilde{a}_\beta + M^{\alpha 3}\tilde{a}_3$$

$$\tilde{N}^\alpha = N^{\alpha i}\tilde{a}_i = N^{\alpha\beta}\tilde{a}_\beta + N^{\alpha 3}\tilde{a}_3$$

در جایگذاری در فرم‌های موضعی معادلات تعادل داریم:

$$N^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha N^{\alpha 3} + \rho f^\beta = \rho a^\beta$$

$$N^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta}N^{\alpha\beta} + \rho f^3 = \rho a^3$$

$$M^{\alpha\beta}|_\alpha - b^\beta_\alpha M^{\alpha 3} + \rho\bar{l}^\beta = m^\beta$$

$$M^{\alpha 3}|_\alpha + b_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta} + \rho\bar{l}^3 = m^3$$

به طوری که $\tilde{\bar{l}} = \tilde{l} - \alpha\dot{\tilde{w}}$ ، همچنین در مورد اصل تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای داریم:

$$\varepsilon_{jim}\left[\delta^j_\alpha N^{\alpha i} + d^j m^i + \lambda^j_{.\alpha}M^{\alpha i}\right] = 0$$

که به دو رابطه زیر قابل تفکیک است:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\left[N^{\alpha\beta} + m^\beta d^\alpha + M^{\gamma\beta}\lambda^\alpha_{.\gamma}\right] = 0$$

$$N^{\alpha 3} + (m^3 d^\alpha - m^\alpha d^3) + M^{\gamma 3}\lambda^\alpha_{.\gamma} - M^{\gamma\alpha}\lambda^3_{.\gamma} = 0$$

$$P = N'^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta} + m^i\dot{d}_i + M^{\alpha i}\dot{\lambda}_{i\alpha}$$

$$N'^{\alpha\beta} = N'^{\beta\alpha} = N^{\alpha\beta} - m^\alpha d^\beta - M^{\gamma\alpha}\lambda^\beta_{.\gamma}$$

۵- معادلات متشکله الاستیک ترمومکانیکی

توابع پاسخ (یا میدانهائی که باید برای آنها معادلهٔ متشکله ارائه کنیم) عبارتند از:

$$\psi,\ \eta,\ \underset{\sim}{N}^\alpha,\ \underset{\sim}{m},\ \underset{\sim}{M},\ \underset{\sim}{q}$$

$$\psi = \bar\psi(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

$$\eta = \bar\eta(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

$$\underset{\sim}{N}^\alpha = \bar{\underset{\sim}{N}}^\alpha(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

$$\underset{\sim}{M}^\alpha = \bar{\underset{\sim}{M}}^\alpha(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

$$\underset{\sim}{m} = \bar{\underset{\sim}{m}}(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

$$\underset{\sim}{q} = \bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta, \theta_{,\alpha}; \theta^\alpha)$$

معادلات متشکله فوق به ازاء کلیهٔ مقادیر t و بین پاسخ ترمومکانیکی یک سطح کوزرات هستند. با جایگذاری معادلات فوق در نامساوی کلازیوس-دوهم داریم:

$$-\rho\dot\psi - \rho\eta\dot\theta + P - \frac{1}{\theta} q^\alpha \theta_{,\alpha} \geqslant 0$$

$$\dot\psi = \frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{a}_\alpha}\dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha + \frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}}\dot{\underset{\sim}{d}} + \frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}_{,\alpha}}\dot{\underset{\sim}{d}}_{,\alpha} + \frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta_{,\alpha}}\dot\theta_{,\alpha}$$

از طرفی داریم:

$$\dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha = \underset{\sim}{v}_{,\alpha} = v_{i\alpha}\underset{\sim}{a}^i = v^i_{\,\alpha}\underset{\sim}{a}_i$$

$$\dot{\underset{\sim}{d}} = (\dot d_i + d^m(W_{im} - D_{im}))\underset{\sim}{a}^i$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} = (\dot\lambda_{i\alpha} + \lambda^\beta_{\,.\alpha}(W_{i\beta} - D_{i\beta}) + \lambda^3_{\,.\alpha} W_{i3})\underset{\sim}{a}^i$$

$$P = \underset{\sim}{M}^\alpha \cdot \underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} + \underset{\sim}{N}^\alpha \cdot \underset{\sim}{v}_{,\alpha} + \underset{\sim}{m}\cdot\underset{\sim}{\omega}$$

با جایگذاری در نامساوی کلازیوس - دوهم داریم:

$$-\rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{a}_\alpha}\dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha - \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}}\underset{\sim}{\omega} - \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}_{,\alpha}}\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} - \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta}\dot\theta - \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta_{,\alpha}}\dot\theta_{,\alpha}$$

$$-\rho\eta\dot\theta + \underset{\sim}{M}^\alpha\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} + \underset{\sim}{N}^\alpha\underset{\sim}{v}_{,\alpha} + \underset{\sim}{m}\,\underset{\sim}{\omega} - \frac{1}{\theta}q^\alpha\theta_{,\alpha} \geqslant 0$$

نامساوی فوق به ازاء کلیهٔ مقادیر دلخواه در حرکت میدانهای $\dot{\underset{\sim}{a}}_\alpha, \dot{\underset{\sim}{d}}, \dot{\underset{\sim}{d}}_{,\alpha}, \dot\theta, \dot\theta_{,\alpha}$ باید برقرار باشد. لذا ضرایب نرخ میدانهای فوق در نامساوی، مستقل از نرخ‌ها باشند. حال فرآیندی را در نظر بگیرید که برای آن $\dot\theta_{,\alpha} = 0$ باشد در این صورت داریم:

$$\dot\theta_{,\alpha} = 0 \rightarrow \frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta_{,\alpha}} = 0 \Rightarrow \psi = \bar\psi(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta)$$

$$\dot\theta = 0 \rightarrow \eta = -\frac{\partial\bar\psi}{\partial\theta} \qquad \dot{\underset{\sim}{d}}_{,\alpha} = 0 \longrightarrow \underset{\sim}{M}^\alpha = \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}_{,\alpha}}$$

$$\dot{\underset{\sim}{d}} = 0 \rightarrow \underset{\sim}{m} = \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{d}} \qquad \underset{\sim}{N}^\alpha = \rho\frac{\partial\bar\psi}{\partial \underset{\sim}{a}_\alpha}, \quad \underset{\sim}{q}^\alpha\cdot\theta_{,\alpha} \leqslant 0$$

حال برای عدم تغییر تحت حرکت صلب الحاقی باید داشته باشیم:

$$\psi = \bar\psi(\underset{\sim}{a}_\alpha, \underset{\sim}{d}, \underset{\sim}{d}_{,\alpha}, \theta) = \tilde\psi(a_{\alpha\beta}, d_\alpha, \lambda_{\alpha\beta}, \delta, \delta_\alpha, \theta)$$

داریم :

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}^T + \underset{\sim}{d}^N \quad ; \quad \underset{\sim}{d}^T = d^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha \quad , \quad \underset{\sim}{d}^N = d^3 \underset{\sim}{a}_3$$

$$\underset{\sim}{d}_{,\alpha} = (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^T + (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^N \quad , \quad (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^T = \lambda^\gamma_{\cdot\alpha} \underset{\sim}{a}_\gamma \quad , \quad (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^N = \lambda^3_{\cdot\alpha} \underset{\sim}{a}_3$$

حال کمیت‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \sigma \triangleq \underset{\sim}{d}^N \cdot \underset{\sim}{d}^N = (d^3)^2 \\ \sigma_\alpha \triangleq \underset{\sim}{d}^N \cdot (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^N = d^3 \lambda^3_{\cdot\alpha} \\ \sigma_{\alpha\beta} \triangleq (\underset{\sim}{d}_{,\alpha})^N \cdot (\underset{\sim}{d}_{,\beta})^N = \lambda_{3\alpha} \lambda_{3\beta} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{a}_3 = \frac{\underset{\sim}{d} - d^\alpha \underset{\sim}{a}_\alpha}{d^3} \quad , \quad \underset{\sim}{d}_{,\alpha} = \left(\lambda^\beta_{\cdot\alpha} - \frac{d^\beta \sigma_\alpha}{\sigma}\right) \underset{\sim}{a}_\beta + \frac{\sigma_\alpha}{\sigma} \underset{\sim}{d}$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \underset{\sim}{a}_\beta} = \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a_{\beta\gamma}} \underset{\sim}{a}_\gamma + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a_{\gamma\beta}} \underset{\sim}{a}_\gamma\right) + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial d_\beta} \underset{\sim}{d} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda_{\beta\gamma}} \underset{\sim}{d}_{,\gamma}$$

$$- \left[2 d^3 d^\beta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma} + (d^\beta \lambda^3_{\cdot\alpha} + d^3 \lambda^\beta_{\cdot\alpha}) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma_\alpha}\right] \underset{\sim}{a}_3$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \underset{\sim}{d}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial d_\gamma} \underset{\sim}{a}_\gamma + 2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma} d^3 \underset{\sim}{a}_3 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma_\alpha} \lambda^3_{\cdot\alpha} \underset{\sim}{a}_3$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \underset{\sim}{d}_{,\gamma}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda_{\alpha\gamma}} \underset{\sim}{a}_\alpha + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma_\gamma} d^3 \underset{\sim}{a}_3$$

با بکار بردن روابط اخیر و همچنین روابط زیر :

$$(\underset{\sim}{N}^\alpha)^+ = \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{N}^\alpha \qquad \underset{\sim}{a}_\alpha^{+T} = \underset{\sim}{a}_\alpha \underset{\sim}{Q}^T$$

$$\underset{\sim}{m}^+ = \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{m} \qquad \underset{\sim}{d}^+ = \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{d} \qquad \dot{\underset{\sim}{a}}_i^+ = \underset{\sim}{Q}(\dot{\underset{\sim}{a}}_i + \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{a}_i)$$

$$(\underset{\sim}{M}^\alpha)^+ = \underset{\sim}{Q} (\underset{\sim}{M}^\alpha) \qquad \underset{\sim}{d}_{,\alpha}^+ = \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{d}_{,\alpha} \qquad \underset{\sim}{\omega}^+ = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{\omega} + \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{d})$$

$$\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha}^+ = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{\omega}_{,\alpha} + \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{\Omega} \underset{\sim}{Q} \underset{\sim}{d}_{,\alpha})$$

داریم :

$$\eta = - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \theta}$$

$$N'^{\alpha\beta} = N'^{\beta\alpha} = 2\rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial a_{\alpha\beta}}$$

$$m^\alpha = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial d_\alpha} \quad , \quad m^3 = \rho \left(2 d^3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma} + \lambda^3_{\cdot\alpha} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma_\alpha}\right)$$

$$M^{\alpha\gamma} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \lambda_{\gamma\alpha}} \quad , \quad M^{\alpha 3} = \rho d^3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \sigma_\alpha}$$

موضوع: .... تاریخ: ....

بررسی تعاریف تنش‌ها :

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{t}_i \sqrt{g^{ii}}\, n_i$$

و $\mathbf{t}^i$ نیز همانند یک بردار پادوردا است

$$\therefore \quad \mathbf{t}_i \sqrt{g^{ii}} = \mathbf{t}^i$$

$$\mathbf{t}^i = T^{ij} \mathbf{g}_j \quad (1) \qquad T^{ij} = \mathbf{t}^i \cdot \mathbf{g}^j$$

$$\mathbf{t}^i = T^{ji} \mathbf{g}_j \quad (2) \qquad T^{ij} = \mathbf{t}^j \cdot \mathbf{g}^i$$

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}_A \sqrt{G^{AA}}\, N_A$$

و $\mathbf{P}^A$ نیز همانند یک بردار پادوردا است

$$\therefore \quad \mathbf{P}_A \sqrt{G^{AA}} = \mathbf{P}^A$$

$$\mathbf{P}^A = P^{Ai} \mathbf{g}_i \quad (3) \qquad P^{Ai} = \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{g}^i$$

$$P^A = P^{iA} \mathbf{g}_i \quad (4) \qquad P^{iA} = \mathbf{P}^A \cdot \mathbf{g}^i$$

$$\mathbf{P}\, dA = \mathbf{t}\, da \longrightarrow \mathbf{P}^M N_M\, dA = \mathbf{t}^i n_i\, da$$

$$P^{Mi} \mathbf{g}_i N_M\, dA = T^{ij} \mathbf{g}_j n_i\, da$$

از طرفی داریم:

$$n_i\, da = J X^M_{,i} N_M\, dA$$

$$P^{Mi} N_M\, dA\, \mathbf{g}_i = T^{ij} \mathbf{g}_j\, J X^M_{,i} N_M\, dA$$

موضوع: .... تاریخ: ....

$$\therefore \quad P^{Mj} = J X^M_{,i} T^{ij} \quad \text{or} \quad \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}$$

$$S^{AB} \triangleq X^A_{,i} P^{Bi} \quad \text{or} \quad \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}^T$$

حال اگر بصورت زیر $\mathbf{S}$ را تعریف کنیم:

$$\mathbf{P}^A = S^{AB} \mathbf{G}_B = P^{Ai} \mathbf{g}_i$$

$$P^{Ai} = S^{AB} \mathbf{G}_B \cdot \mathbf{g}^i \quad \text{or} \quad S^{AB} = P^{Ai} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}^B$$

$$S^{BA} = P^{Bi} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}^A = X^A_{,i} P^{Bi}$$

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{G}^A \overset{?}{=} \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \qquad \mathbf{G}^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^i} \mathbf{g}^i$$

کرنش

$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} - a_{ij}) \quad . \quad \varepsilon^i_j = a^{ik}\varepsilon_{kj}$

$\varepsilon^i_j = \frac{1}{2}(a^{im} b_{mj} - \delta^i_j)$

$|\lambda\delta^r_s + \delta^r_s + 2\varepsilon^r_s| = |\lambda\delta^r_s + a^{rm}b_{ms}|$

$= (b/a)\,|\lambda b^{rm}a_{ms} + \delta^r_s| = \lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3$

$I_1 = 3 + 2\varepsilon^r_r = a^{rs}b_{rs}$

$I_2 = 3 + 4\varepsilon^r_r + 2(\varepsilon^r_r\varepsilon^s_s - \varepsilon^r_s\varepsilon^s_r)$

$= \frac{1}{2}(I_1^2 - a^{rm}a^{sn}b_{rs}b_{mn})$

$= b^{rs}a_{rs}I_3$

$I_3 = |\delta^r_s + 2\varepsilon^r_s| = |a^{rm}b_{ms}| = b/a$

تنش

$\underset{\sim}{t} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta a} \quad \mathscr{L}: \Delta a \to 0$

تعادل اندازه حرکت خطی $\int_{\partial R} \underset{\sim}{t}\, da + \int_R \rho(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})\, dv = 0$

تعادل اندازه حرکت زاویه‌ای $: \int_{\partial R} \underset{\sim}{r} \times t\, da + \int_R \rho\, \underset{\sim}{r} \times (\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})\, dv = 0$

$\underset{\sim}{n}\, da = \sum_{i=1}^{3} \frac{\underset{\sim}{b}^i}{\sqrt{b^{ii}}}\, da_i \Rightarrow da_i = \sqrt{b^{ii}}\, n_i\, da$

$\therefore \quad \underset{\sim}{t}\, da = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{t}_i\, da_i = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{t}_i \sqrt{b^{ii}}\, n_i\, da$

$\therefore \quad \underset{\sim}{t} = \sum_{i=1}^{3} \underset{\sim}{t}_i \sqrt{b^{ii}}\, n_i \Rightarrow \underset{\sim}{t}^i \triangleq \underset{\sim}{t}_i \sqrt{b^{ii}}$

$\underset{\sim}{t}^i = \tau^{ij}\underset{\sim}{b}_j \qquad \underset{\sim}{t}_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{(ij)} \frac{\underset{\sim}{b}_j}{\sqrt{b_{jj}}}$

$\sigma_{(ij)} = \sqrt{\frac{b_{jj}}{b^{ii}}}\, \tau^{ij}$ ، مولفه فیزیکی تنش

$\int_R \left[\frac{1}{\sqrt{b}}(\sqrt{b}\, \underset{\sim}{t}^i)_{,i} + \rho(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})\right] dv = 0$

$(\sqrt{b}\, \underset{\sim}{t}^i)_{,i} + \rho\, \underset{\sim}{b}\sqrt{b} = \rho\, \underset{\sim}{a}\sqrt{b}$

$\underset{\sim}{T}^i \triangleq \sqrt{b}\, \underset{\sim}{t}^i = \underset{\sim}{t}_i \sqrt{b\, b^{ii}} = \sqrt{b}\, \tau^{ij}\underset{\sim}{b}_j$

$\underset{\sim}{t}_i \sqrt{b\, b^{ii}}\, d\theta^j d\theta^k = \underset{\sim}{T}^i\, d\theta^j d\theta^k \quad i \neq j \neq k \neq i$

$\int_R \underset{\sim}{b}_i \times \underset{\sim}{T}^i \frac{dv}{\sqrt{b}} = 0 \Rightarrow \underset{\sim}{b}_i \times \underset{\sim}{T}^i = 0$

$\therefore \quad \tau^{ij} = \tau^{ji}$

موضوع : .... تاریخ : ....

$$\tau^{ij}\|_i + \rho b^j = \rho a^j \quad \text{or} \quad \tau^i_j\|_i + \rho b_j = \rho a_j$$

در مرجع :

$$\underset{\sim}{T}^i d\theta^j d\theta^k = \overset{\circ}{\underset{\sim}{t}}_i \sqrt{a a^{ii}}\, d\theta^j d\theta^k$$

$$\underset{\sim}{T}^i = \overset{\circ}{\underset{\sim}{t}}_i \sqrt{a a^{ii}} = \sqrt{a}\, S^{ij} \underset{\sim}{b}_j \qquad \therefore S^{ij} = \tau^{ij}\sqrt{I_3}$$

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{t}}_i \sqrt{a^{ii}} = S^{ij} \underset{\sim}{b}_j$$

$$\underset{\sim}{T}_i \triangleq \underset{\sim}{t}_i \sqrt{b b^{ii}} \quad , \quad \underset{\sim}{T}_i \triangleq \overset{\circ}{\underset{\sim}{t}}_i \sqrt{a a^{ii}}$$

$$\underset{\sim}{T}_i = \sqrt{b}\, \tau^{ij} \underset{\sim}{b}_j \qquad \tau^{ij} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} S^{ij}$$

$$= \sqrt{a}\, S^{ij} \underset{\sim}{b}_j \qquad S^{ij} = \sqrt{I_3}\, \tau^{ij}$$

$$= \sqrt{b}\, \Pi^{ij} \underset{\sim}{a}_j \qquad \Pi^{ij} = \tau^{ir}(\delta^j_r + u^j|_r)$$

$$= \sqrt{a}\, P^{ij} \underset{\sim}{a}_j \qquad P^{ij} = S^{ir}(\delta^j_r + u^j|_r)$$

$$P^{ij}|_i + \rho_0 \, {}^{\circ}b^j = \rho_0 \, {}^{\circ}a^j$$

موضوع : .... تاریخ : ....

الاستیتی،

$$R = \int_{\partial R} \underset{\sim}{t} \cdot \underset{\sim}{v}\, da + \int_R \rho \underset{\sim}{b} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv - \int_R \rho \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{v}\, dv$$

$$= \int_{\partial R} (\underset{\sim}{T}_i \cdot \underset{\sim}{v}) \frac{n_i\, da}{\sqrt{b}} + \int_R \rho(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}) \cdot \underset{\sim}{v}\, dv$$

$$= \int_R \underset{\sim}{T}_i \cdot \underset{\sim}{v}_{,i} \frac{dv}{\sqrt{b}} = \int_R \tau^{ij} \underset{\sim}{b}_j \cdot \underset{\sim}{v}_{,i}\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_R \tau^{ij} (\underset{\sim}{b}_j \cdot \underset{\sim}{v}_{,i} + \underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{v}_{,j})\, dv$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \tfrac{1}{2} \dot{b}_{ij} = \tfrac{1}{2} (\underset{\sim}{b}_i \cdot \underset{\sim}{v}_{,j} + \underset{\sim}{b}_j \cdot \underset{\sim}{v}_{,i})$$

$$\therefore R = \int_R \tau^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}\, dv = \int_R \rho \dot{\varepsilon}\, dv$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_{ij}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{ji}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_{ji}}\right)$$

$$W = \rho_0 \varepsilon$$

$$\dot{W} = S^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = P^{ij} v_{j|i}$$

برای بدنه همگن ایزوتروپیک ثابت کنید

$\mathcal{L}: \quad W = W(I_1, I_2, I_3)$

$$I_1 = a^{rs} b_{rs} \quad , \quad I_2 = a_{rs} b^{rs} I_3 \quad , \quad I_3 = b/a$$

$$\tau^{ij} = \alpha\, a^{ij} + \beta\, B^{ij} + \gamma\, b^{ij}$$

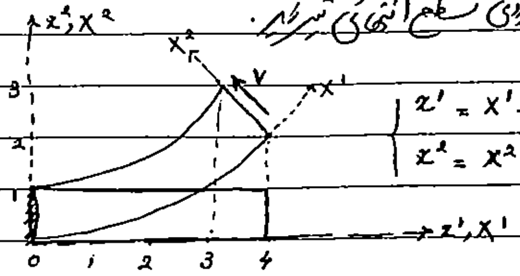
$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad , \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad , \quad \gamma = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3}$$

$$B^{ij} = I_1 a^{ij} - a^{ir} a^{js} b_{rs} = \frac{1}{2} \varepsilon^{irm} \varepsilon^{jsn} a_{rs} b_{mn}$$

$\mathcal{L}: \quad I_3 = 1 \qquad W = W(I_1, I_2)$

$$\alpha = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad , \quad \beta = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}$$

مثال : فرض کنید قانون هوک در خصوص جسم تیر برای تانسور تنش پیولای متقارن برقرار باشد،
مطلوب است محاسبه نیروی اعمالی بر روی سطح انتهایی تیر.



$$\begin{cases} x^1 = X^1 - \frac{1}{4} X^1 X^2 \\ x^2 = X^2 + \frac{1}{8} (X^1)^2 \end{cases}$$

$$\underline{r} = \left(X^1 - \tfrac{1}{4} X^1 X^2\right) \underline{e}_1 + \left(X^2 + \tfrac{1}{8} (X^1)^2\right) \underline{e}_2$$

$$\underline{b}_1 = \underline{r}_{,1} = \left(1 - \tfrac{1}{4} X^2\right) \underline{e}_1 + \left(\tfrac{1}{4} X^1\right) \underline{e}_2$$

$$\underline{b}_2 = \underline{r}_{,2} = \left(-\tfrac{1}{4} X^1\right) \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

$$b_{11} = \left(1 - \tfrac{1}{4} X^2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4} X^1\right)^2 \qquad b_{12} = \frac{1}{16} X^1 X^2$$

$$b_{22} = 1 + \frac{1}{16} (X^1)^2$$

$$V = \int_0^1 S^{12}\, dX^2 = \int_0^1 G \frac{1}{16} (4 X^2)\, dX^2 = \frac{G}{8}$$

$$\underline{V} = \frac{G}{8\sqrt{2}} \left(-\underline{e}_1 + \underline{e}_2\right)$$

$$S^{ij} = \lambda\, \varepsilon^m_m\, a^{ij} + 2\mu\, a^{im} a^{jn} \varepsilon_{mn}$$

$$\overset{\circ}{\underline{t}}_i \sqrt{a a^{ii}} = \underline{t}_i \sqrt{b b^{ii}} = \sqrt{a}\, S^{ij} \underline{b}_j$$

مطلوب است محاسبه تانسور تنش کوشی در نقطه فوقانی انتهای تیر

$X^1 = 4 \;,\; X^2 = 1$